2 LÓGICA MATEMÁTICA

2.1 Introducción

Analiza y discute lo siguiente:
Una mañana, Felipe fue encontrado muerto de un balazo y la policía detuvo a tres sospechosos: Pedro, Juan y Daniel, esa misma mañana los tres fueron interrogados y declararon lo siguiente:

Pedro	Yo no lo maté Yo nunca había visto a Juan antes Es cierto, yo conocía a Felipe
Juan	Yo no lo maté Pedro y Daniel son mis amigos Pedro jamás ha matado a alguien
Daniel	Yo no lo maté Pedro miente cuando dice que no había visto a Juan antes Yo no sé quién lo mató

Una y sólo una declaración de cada uno es falsa y uno de los tres es el culpable, ¿quién lo mató?

Todo el análisis que se haga de este problema estará basado en suponer que una y sólo una declaración de cada uno de ellos es falsa y que uno de los tres es el culpable. Haciendo estas suposiciones, revisa si hay consistencia al afirmar que Pedro es el culpable. Haz un análisis similar para Juan y Daniel.

¿Quién mató a Felipe?[1]_________________

Como habrás observado en tu análisis, una vez que uno parte de ciertas suposiciones, es cuestión de aplicar algunas reglas para justificar claramente si una conclusión es válida o no. Pero es necesario tener presente que la validez de la conclusión que se obtenga, depende de la validez de las premisas. Esto es la esencia de la lógica y toda ciencia necesita de la lógica cuando quiere justificar las relaciones que establece entre los objetos o fenómenos que estudia.

Ejercicios 2.1:

1) Tres señores ya jubilados: Tancredo, Ubaldo y Venancio, en muestra de caballerosidad, se ofrecieron para arreglar el armario, la puerta y la ventana en la casa de la nueva, bella y joven vecina. Al terminar cada uno dejó olvidada una herramienta (lima, martillo o pinza) en un lugar de la casa (baño, cocina o jardín). Deduce qué reparó cada uno y dónde dejó olvidada la herramienta sabiendo lo siguiente.

---

[1] Juan mató a Felipe

- El vecino que vive a la izquierda de la nueva vecina arregló la puerta; el de la derecha olvidó el martillo y el de enfrente dejó algo en la cocina.
- Ubaldo, que olvidó la pinza, vive enfrente de la casa de Tancredo, que reparó la ventana.
- Alguien dejó una lima en el baño.

Vecino	reparó	olvidó	en

2) Existen tres cuevas A, B y C; en una de ellas está una princesa, en otra hay un dragón y la tercera está vacía; sólo el letrero donde se encuentra la princesa es verdadero, los letreros en cada cueva son:

A	B	C
La cueva C está vacía	El dragón está en esta cueva	La cueva de en medio está vacía

¿En cuál cueva está la princesa?

3) Enrique, Luis y Pedro difieren en su estado de salud, sus apellidos son: Colina, González y Morales, pero no necesariamente en ese orden. Luis no es tan sano como Enrique y Pedro es más sano que Luis, pero menos que Enrique. Por otra parte, Colina es más sano que González, ¿cuál es el nombre completo del menos sano?

4) En una tierra aún más insólita que ésta, los habitantes son sinceros o mentirosos dependiendo, no sólo del día de la semana, sino también de que el día esté despejado o lluvioso. Tres habitantes se encuentran y hacen las siguientes afirmaciones:
A: llueve y es martes
B: está despejado y es martes
C: ayer no fue miércoles y mañana no será miércoles
Se sabe que A miente cuando está despejado en martes, en jueves y en sábado y cuando llueve en lunes, en miércoles y en viernes. En todos los demás casos dice la verdad. Por otra parte, tanto B como C mienten cuando está despejado en lunes, en miércoles y en viernes y cuando llueve en martes, en jueves y en sábado. En todos los otros casos dicen la verdad. ¿Qué día de la semana es?

2.2 Conceptos Básicos

En el ejemplo con el que empezamos este capítulo usamos una serie de oraciones declarativas como –Es cierto, yo conocía a Felipe, –Yo no lo maté; en lógica a una oración declarativa que sólo puede ser falsa o verdadera (pero no ambas) se le llama **proposición** y se distinguen dos tipos: **proposición simple**, si se trata de una afirmación única y **proposición compuesta** si se trata de una negación o de varias afirmaciones enlazadas. El nombre específico que recibe cada proposición compuesta depende de la o las palabras que enlazan estas proposiciones, por ello tales palabras reciben el nombre de términos de enlace o conectivos lógicos.

Término de enlace	Nombre de la proposición compuesta
no	negación
y	conjunción
o	disyunción
si … entonces...	condicional
... si y sólo si ...	bicondicional

Analicemos las siguientes oraciones:

1) Marte es un planeta sin vegetación
2) Juan mide 2 m de estatura
3) 5 = 3 y 12 es múltiplo de 3
4) ¿Qué hora es?
5) Hay más de 10^{62} habitantes en el planeta
6) Si A B = 0, entonces A = 0 o B = 0
7) María es bonita
8) O trabajo o no tendré dinero para comer
9) Cuando hago ejercicio, me siento mejor
10) Tengo dinero si y sólo si trabajo
11) Juan dice que María es bonita

Las oraciones 1, 2, 3, 5, 8, 9, 10 y 11 son proposiciones. La 1, la 2, la 5 y la 11 son las únicas proposiciones simples; la 3 es una conjunción, la 8 es una disyunción, la 9 una condicional y la 10 una bicondicional.

Comentemos ahora las oraciones que no son proposiciones y por qué no lo son. La 4 no lo es porque no es una oración declarativa. La 6 no lo es porque el que sea falsa o verdadera depende de quiénes sean A y B, por ejemplo si A y B son números reales, es verdadera, pero si A y B son matrices, es falsa. En este caso la oración podría convertirse en proposición siempre y cuando se especifique quienes son A y B. La 7 es ambigua porque el que sea falsa o verdadera depende de quien califique y del concepto de belleza que tenga.

Muchas personas no podrían decir si la proposición 5 es falsa o verdadera, a pesar de esto es falsa o verdadera, pero no ambas. Observa que en la proposición 8 el segundo "o" es realmente el término de enlace, el primero sólo enfatiza al segundo. A veces se omiten las palabras "si entonces" en una proposición condicional sustituyéndolas por una coma como en el ejemplo 9 que podría haberse escrito también como "si hago ejercicio, entonces me siento mejor".

Con el fin de manejar las proposiciones con más facilidad y precisión se acostumbra representarlas con letras del alfabeto; de igual manera se usan los siguientes símbolos para representar los términos de enlace

no	$\neg$	
y	$\wedge$	
o	$\vee$	
si … entonces…	$\rightarrow$	Nota: Los puntos suspensivos representan las
… si y sólo si …	$\leftrightarrow$	proposiciones

Por ejemplo, si en la proposición "Si Juan obtiene un promedio mayor que 80, conseguirá una beca para continuar sus estudios" simbolizamos "Juan obtiene un promedio mayor que 80" con p y "conseguirá una beca para continuar sus estudios" con q; la proposición compuesta quedaría simbolizada $p \rightarrow q$ (que se lee: si p entonces q ó p implica q). En una proposición condicional, como la de este ejemplo, la proposición a la izquierda del entonces es llamada antecedente y la de la derecha, consecuente.

2.3 Lógica Proposicional

Como ya se ha dicho, una proposición sea simple o compuesta, sólo puede ser falsa o verdadera. El valor de verdad de una proposición compuesta depende de la combinación de valores de las proposiciones simples involucradas (a las que llamaremos variables) y de la forma que se construyó la proposición a partir de ellas. De esta manera, dadas dos proposiciones p y q, los valores de verdad de las proposiciones compuestas $\neg p$, $p \wedge q$, $p \vee q$, $p \rightarrow q$ y $p \leftrightarrow q$ quedan determinadas por los valores de verdad de p y de q de acuerdo con las siguientes tablas de verdad

p	$\neg p$
F	V
V	F

p	q	$p \vee q$
F	F	F
F	V	V
V	F	V
V	V	V

p	q	$p \wedge q$
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

p	q	$p \rightarrow q$
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

p	q	$p \leftrightarrow q$
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Observa en las tablas anteriores lo siguiente:

- la negación de p tiene un valor contrario al de p
- para que la disyunción sea verdadera basta con un valor verdadero
- la conjunción sólo es verdadera cuando ambas proposiciones son verdaderas (muy exigente)
- la condicional sólo es falsa cuando, siendo cierto el antecedente, es falso el consecuente. Por ejemplo, si tuviéramos la proposición $p \rightarrow q$ dicha por un político "si resulto electo, entonces hago un puente", analicemos bajo qué circunstancias el político quedaría como mentiroso

a) p q — F F — el político no resulta electo y no se hace el puente, ¿mintió? No, ya que no hizo compromiso si no resultaba electo.

b) p q — el político no resulta electo y se hace el puente, ¿mintió? No, por la
F V — misma razón que en el inciso anterior.

c) p q — el político resulta electo y se hace el puente, ¿mintió? No, puesto
V V — que cumplió la promesa.

d) p q — el político resulta electo y no se hace el puente, ¿mintió? Sí, porque
V F — él prometió hacer un puente si resultaba electo y no cumplió; por lo que sólo miente si resulta electo y no hace el puente

- por último, la bicondicional sólo es verdadera cuando ambas proposiciones tienen el mismo valor

Ejercicios 2.3a:

1) Determina cuáles de las siguientes frases son proposiciones. Proporciona los valores de verdad de las proposiciones.
   a) Tómate 2 aspirinas
   b) 4 + 2 = 5 o 20 es múltiplo de 5
   c) $2^{89} + 1$ es un número impar
   d) Me duele la cabeza
   e) Si la tierra es plana entonces 3 + 3 = 6
   f) 2 es un número primo y 9 es un número par
   g) ¿cuántos años tienes?
   h) $x\,y = y\,x$
   i) Hoy es lunes si y sólo si mañana es martes

2) Considera la frase ambigua "Si $x^2 = y^2$ entonces $x = y$ para todo x, y..."
   a) Completa esta frase para que sea una proposición con valor de verdad verdadero
   b) Completa esta frase para que sea una proposición con valor de verdad falso

3) Considera que sabemos que $p \vee \neg q$ es falso, usa esto para proporcionar los valores de verdad de
   a) $p \wedge q$
   b) $p \rightarrow q$
   c) $q \rightarrow p$
   d) $p \vee q$

4) Nuestros vecinitos Igor, Jonás, León y Simón son unos niños prodigio. Cada uno habla un idioma exótico (griego, chino, ruso o sueco) además de su lengua natal y toca a la perfección un instrumento (tuba, fagot, oboe o violín). El idioma que hablan, el instrumento que tocan y la edad que tienen (5, 6, 7 u 8 años) son distintos para cada niño. Deduce, para cada uno, el idioma que habla, el instrumento que toca y la edad que tiene asumiendo que las siguientes afirmaciones son verdaderas.
   1. Si el que habla sueco no toca el oboe, el de 7 años no toca el violín.
   2. Si el de 7 años no toca el violín, León tiene 6 años.
   3. Si León tiene 6 años, Simón no tiene 6 años.

4. Si Simón no tiene 6 años, León toca el oboe.
5. Si León toca el oboe, León habla sueco.
6. Si Jonás no habla ruso, el que habla sueco no toca el oboe.
7. Si Jonás habla ruso, el de ocho años habla chino.
8. Si el de 8 años no toca el oboe, León tiene 5 años.
9. Si León tiene 5 años, el de 7 años habla ruso.
10. Si el de 7 años habla ruso, León toca el oboe.
11. Si León toca el oboe, Igor no habla griego.
12. Si León habla sueco, el de 6 años toca el fagot.

Niño	Edad	Instrumento	Idioma

Hasta aquí hemos visto proposiciones compuestas en las que sólo aparece un término de enlace, sin embargo una proposición puede tener varios términos de enlace y el nombre que se le da depende de cuál término de enlace tiene mayor fuerza (término de enlace dominante). Para decidir esto se acostumbra usar la convención dada en la siguiente tabla:

Tabla 1. Fuerza de los términos de enlace

$\leftrightarrow$

$\rightarrow$

$\vee$

$\wedge$

$\neg$

Mientras más arriba en esta tabla se encuentre el término de enlace, mayor es su fuerza. La fuerza de los términos de enlace puede ser alterada por el uso de paréntesis, dejando fuera del paréntesis el término que se desea, sea el más fuerte.

- $p \wedge q \rightarrow r$ es una proposición condicional que con paréntesis $p \wedge (q \rightarrow r)$ se transforma en una conjunción
- $\neg p \vee r$ es una disyunción, pero $\neg (p \vee r)$ es una negación

Distinguir cuál es el término de enlace dominante es el primer paso que se debe dar cuando se quiere saber cuál es el valor de verdad de una proposición; por ejemplo $\neg (p \wedge q) \rightarrow p \vee s$ es una proposición condicional en la que el antecedente es una negación y el consecuente una disyunción. Si se quiere saber el valor de verdad de la proposición anterior cuando p, q y s son todos falsos, se tendrá que conocer primero el valor de su antecedente y el de su consecuente;

$$? \longrightarrow ?$$

como su antecedente es la negación de una conjunción, habrá que evaluar la conjunción primero y luego negarla, esto puede hacerse de la siguiente manera:

p q s	$p \wedge q$	$\neg (p \wedge q)$	$p \vee s$	$\neg (p \wedge q) \rightarrow p \vee s$
F F F	F	V	F	F

Esta tabla puede ser simplificada haciéndose la evaluación justo debajo de cada uno de los términos de enlace, anotando ahí el valor resultante de la proposición. De esta forma es más fácil saber cuál valor tiene la proposición para todas y cada una de las posibles combinaciones de los valores de sus variables.

En la siguiente tabla, numera los términos de enlace de acuerdo al orden en que deben ser evaluados y haz la evaluación. Resalta la columna que da el valor de la proposición[2].

p q s	$\neg \; (p \; \wedge \; q) \; \rightarrow \; p \; \vee \; s$
F F F	
F F V	
F V F	
F V V	
V F F	
V F V	
V V F	
V V V	

Nota que las combinaciones de valores coinciden con los primeros números binarios escritos con tres dígitos haciendo la conversión de que falso vale cero y verdadero vale uno.

FFF 000
FFV 001
FVF 010
FVV 011
VFF 100
VFV 101
VVF 110
VVV 111

2

			2	1	3	
p	q	s	$\neg$	$(p \wedge q)$	$\rightarrow$	$p \vee s$
F	F	F	V	F	**F**	F
F	F	V	V	F	**V**	V
F	V	F	V	F	**F**	F
F	V	V	V	F	**V**	V
V	F	F	V	F	**V**	V
V	F	V	V	F	**V**	V
V	V	F	F	V	**V**	V
V	V	V	F	V	**V**	V

Observa también que el número posible de combinaciones de valores para las variables involucradas en una proposición, depende del número de variables involucradas. Así para una variable hay dos combinaciones posibles F y V; para dos variables hay cuatro posibilidades FF, FV, VF y VV. Continúa el análisis para que encuentres una expresión que te dé el número posible de combinaciones para *n* variables. La expresión que resulta es: ___

Ejercicios 2.3b:
Elabora una tabla de verdad para las siguientes proposiciones

1) $(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q \vee \neg s \wedge p$

2) $p \wedge q \vee r \leftrightarrow p \wedge \neg q$

Hay proposiciones "especiales" cuyo valor de verdad siempre es el mismo independientemente de los valores de las variables involucradas; para observar esto haz las tablas de verdad para las siguientes proposiciones: $(p \wedge \neg p)$ y $(p \vee \neg p)$.

Habrás observado que $p \wedge \neg p$ siempre es falsa y que $p \vee \neg p$ siempre es verdadera. A las proposiciones que siempre son falsas como $p \wedge \neg p$ se les llama **contradicciones** y a las que siempre son verdaderas como $p \vee \neg p$ se les llama **tautologías**. A las demás se les llama **contingentes**.

Ejercicios 2.3c:
Para cada una de las siguientes proposiciones:

1) identifica el término de enlace dominante

2) da el nombre de la proposición

3) determina cuál(es) combinación(es) de valores hace(n) que la proposición sea:
   a) falsa
      i) $(\neg p \wedge s \rightarrow q) \vee (q \vee r \rightarrow p \wedge s)$
      ii) $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$
      iii) $(q \wedge r \rightarrow p) \wedge (q \rightarrow \neg r) \rightarrow p$

   b) verdadera
      i) $\neg[(p \rightarrow q) \wedge (q \wedge \neg r) \rightarrow p \vee r]$
      ii) $\neg(r \wedge s \rightarrow q) \wedge (p \rightarrow q) \leftrightarrow p \rightarrow s \vee \neg r$

Como en el ejercicio anterior solamente se pide para cuál combinación de los valores de sus variables resulta falsa o verdadera la proposición, no es necesario elaborar toda la tabla, bastaría con hacer una inspección o análisis de las posibilidades que se tienen de acuerdo con el término de enlace dominante. Por ejemplo, analicemos del inciso a) la proposición i); ésta es una disyunción, así que, para que sea falsa es necesario que las dos proposiciones que la componen sean falsas; como ambas son condicionales, para que sean falsas el antecedente debe ser verdadero y el consecuente falso, con base en esto se implica lo siguiente:

1) q debe ser falsa

2) $\neg p \wedge s$ verdadera
3) $q \vee r$ verdadera y
4) $p \wedge s$ falsa

Continuando con las implicaciones, de 2) se implica que s es verdadera y p falsa; para que la 3) sea verdadera por lo menos una debe ser verdadera, como ya se sabe que q es falsa, r debe ser verdadera. Con esto ya tenemos los valores para todas las variables involucradas, sólo resta verificar la consistencia del resultado 4). Puesto que ya teníamos p falsa y s verdadera, sí se cumple que $p \wedge s$ sea falsa.

2.4 Álgebra Declarativa en Lógica Proposicional

2.4.1 Equivalencias Lógicas

Habrás notado que, en la proposición $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ del ejercicio anterior, no es posible encontrar una combinación de valores para p y q que la hagan falsa, observemos esto en su tabla de verdad

P	q	$\neg$ (p $\wedge$ q)	$\leftrightarrow$	$\neg p$ $\vee$ $\neg q$
F	F	V F	V	V V V
F	V	V F	V	V V F
V	F	V F	V	F V V
V	V	F V	V	F F F

El que una bicondicional sea siempre verdadera, significa que las proposiciones que enlaza son simultáneamente verdaderas o simultáneamente falsas, esto es, tienen los mismos valores de verdad para cada opción de los valores de verdad de sus variables, por lo que estas dos proposiciones tienen el mismo significado y se dice que son lógicamente equivalentes. En general, dos proposiciones P y Q (usaremos letras mayúsculas para representar proposiciones que pueden ser compuestas) se consideran **lógicamente equivalentes** si tienen los mismos valores de verdad para cada opción de los valores de verdad de las variables simples involucradas. Esto se denota $P \Leftrightarrow Q$ y se lee P es lógicamente equivalente a Q (en este caso $P \leftrightarrow Q$ es una tautología). Volviendo a la proposición $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ y de acuerdo con lo que acabamos de decir, tenemos que $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$.

Ejercicios 2.4. 1a:

1) La proposición $p \rightarrow q$ tiene asociadas las proposiciones: $q \rightarrow p$, llamada su **recíproca** y $\neg q \rightarrow \neg p$ llamada su **contrapositiva**. Simboliza cada una de las proposiciones de la lista dada e identifica para cada una de ellas su recíproca y su contrapositiva (tomándolas de la misma lista).
   a) "si estoy en la escuela, entonces no estoy en casa"
   b) "si estoy en casa, entonces no estoy en la escuela"
   c) "si no estoy en la escuela, entonces estoy en casa"

d) “si no estoy en casa, entonces estoy en la escuela”

2) Basándote en el significado de las proposiciones dadas en el problema 2, determina si $p \rightarrow q$ es lógicamente equivalente a alguna de sus dos proposiciones asociadas, su recíproca o su contrapositiva. Verifica con las tablas de verdad correspondientes si tu respuesta es correcta.

3) Cambia $p \rightarrow q$ por una disyunción lógicamente equivalente a ella.

4) En el ejercicio 4) te diste cuenta que puedes cambiar una implicación por una disyunción lógicamente equivalente a ella, esto es posible porque tanto la disyunción como la implicación tienen un solo caso para el que son falsas.
   a) Explica por qué no es posible cambiar una conjunción por una disyunción equivalente.
   b) Cambia $p \wedge q$ por una proposición lógicamente equivalente en la que uses sólo los términos de enlace $\neg$ y $\vee$, da el nombre de esta proposición.

Al cambiar la forma de una proposición sin alterar su significado se tiene la posibilidad de analizarla desde perspectivas distintas, lo que en un momento dado puede ayudarnos a tener una mejor comprensión de un problema. Es posible también que sea necesario cambiar, en una proposición, los términos de enlace que no existan en el lenguaje computacional que se está usando y que deben ser sustituidos sin alterar el significado de la proposición. Para hacer éstas y otras tareas importantes en computación se te da la siguiente tabla que contiene las equivalencias lógicas más comunes.

Tabla 2. Equivalencias lógicas

1. $(\neg\neg P) \Leftrightarrow P$	doble negación
2a. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$	
b. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$	leyes conmutativas
c. $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (Q \leftrightarrow P)$	
3a. $[(P \vee Q) \vee R] \Leftrightarrow [P \vee (Q \vee R)]$	leyes asociativas
b. $[(P \wedge Q) \wedge R] \Leftrightarrow [P \wedge (Q \wedge R)]$	
4a. $[P \vee (Q \wedge R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \wedge (P \vee R)]$	leyes distributivas
b. $[P \wedge (Q \vee R)] \Leftrightarrow [(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)]$	
5a. $(P \vee P) \Leftrightarrow P$	leyes de idempotencia
b. $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$	
6a. $(P \vee$ [3]_______________$) \Leftrightarrow P$	
b. $(P \vee$ Tautología$) \Leftrightarrow$ [4]_______________	leyes de identidad
c. $(P \wedge$ Contradicción$) \Leftrightarrow$ [5]_______________	
d. $(P \wedge$ [6]________________$) \Leftrightarrow P$	

[3] P
[4] Tautología
[5] Contradicción
[6] Tautología

7a. $(P \vee \neg P) \Leftrightarrow$ Tautología
b. $(P \wedge \neg P) \Leftrightarrow$ Contradicción
8a. $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
b. $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$
c. $(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$ leyes de DeMorgan
d. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$
9. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$ contrapositiva
10a. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee Q)$
b. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$ implicación
11a. $(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \rightarrow Q)$
b. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg(P \rightarrow \neg Q)$
12a. $[(P \rightarrow R) \wedge (Q \rightarrow R)] \Leftrightarrow [(P \vee Q) \rightarrow R]$
b. $[(P \rightarrow Q) \wedge (P \rightarrow R)] \Leftrightarrow [(P \rightarrow (Q \wedge R)]$
13. $(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)]$ equivalencia
14. $[(P \wedge Q) \rightarrow R] \Leftrightarrow [P \rightarrow (Q \rightarrow R)]$ ley de exportación
15. $(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow [(P \wedge \neg Q) \rightarrow$ Contradicción$]$ reducción al absurdo

Ejercicios 2.4.1b:

1) Verifica con tablas de verdad las equivalencias lógicas 8d, 10a y 15 dadas en la tabla 2 y completa las que se dan de la 6a a la 6d escribiendo las palabras contradicción o tautología según corresponda.

2) ¿Cuál es la diferencia entre $\leftrightarrow$ y $\Leftrightarrow$?

3) Toda proposición compuesta se puede escribir utilizando únicamente los conectivos $\neg$ y $\vee$. Encuentra proposiciones lógicamente equivalentes a las siguientes utilizando solamente los conectivos $\neg$ y $\vee$
   a) $p \rightarrow q$
   b) $p \wedge q$
   c) $p \leftrightarrow q$
   d) $p \wedge q \rightarrow \neg q \wedge r$
   e) $(p \rightarrow q) \wedge (q \vee r)$
   f) $a \rightarrow (b \vee c) \wedge (\neg d \rightarrow s)$

Con base en las leyes asociativas (equivalencia 3), podemos concluir que no es necesario poner paréntesis cuando se tienen varias disyunciones (o varias conjunciones) consecutivas en una misma proposición, por ejemplo, podemos omitir los paréntesis en $(p \vee q) \vee (r \vee s)$ escribiéndola como $p \vee q \vee r \vee s$.

2.4.2 Implicaciones Lógicas

Siempre que $p \rightarrow q$ es verdadera y que p también es verdadera, podemos asegurar que q es verdadera. Verifícalo. Si para dos proposiciones compuestas P y Q tenemos que siempre que P sea verdadero, Q es verdadero, decimos que **P implica lógicamente a Q** y

escribimos $P \Rightarrow Q$. Para nuestro ejemplo podemos tomar P como $(p \rightarrow q) \wedge p$ y Q como q
Observa que si P es verdadera, Q también lo es (tú lo verificaste al inicio) por eso es correcto escribir $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$ (que se lee "p implica q y p; implica lógicamente a q")
Una implicación lógica, como $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$, también puede denotarse de la siguiente manera

$$\begin{array}{l} \quad p \rightarrow q \\ \quad \underline{p \qquad} \\ \therefore\ q \end{array}$$

que se lee p implica q y, p; por lo tanto q.

Hay diferencia entre $P \rightarrow Q$ (P implica Q) y $P \Rightarrow Q$ (P implica lógicamente Q). En el primer caso, si P es verdadera Q puede ser falsa y decimos que la proposición $P \rightarrow Q$ es falsa. En el segundo caso, si P es verdadera, Q jamás será falsa. Es decir, $P \Rightarrow Q$ no es sólo una proposición, es un teorema. Al cambiar $\Rightarrow$ por $\rightarrow$ en $P \Rightarrow Q$ nos queda una tautología.

En cada inciso, determina qué se puede implicar lógicamente a partir de cada grupo de proposiciones[7]

a) $\begin{array}{l} P \vee Q \\ \underline{\neg P \qquad} \\ \therefore \end{array}$ b) $\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \underline{Q \qquad} \\ \therefore \end{array}$ c) $\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \underline{\neg Q \qquad} \\ \therefore \end{array}$

d) $\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \underline{Q \rightarrow R} \\ \therefore \end{array}$ e) $\begin{array}{l} \underline{P \qquad} \\ \therefore \end{array}$ f) $\begin{array}{l} P \rightarrow Q \\ \underline{\neg P \qquad} \\ \therefore \end{array}$

g) $\begin{array}{l} P \\ \underline{Q \qquad} \\ \therefore \end{array}$ h) $\begin{array}{l} \underline{P \wedge Q} \\ \therefore \end{array}$

Habrás notado en el ejercicio anterior, que no en todos los casos se pudo implicar lógicamente una proposición; en los que sí fue posible, lo que hiciste fue construir una regla de inferencia. **Regla de inferencia** es el nombre que recibe una implicación lógica básica, es decir, una implicación sencilla que permite hacer implicaciones lógicas más complicadas. Enseguida aparece una tabla con las implicaciones lógicas más usadas, en ella se incluyen estas reglas de inferencia con los nombres con que se les conoce, así como las abreviaturas que usaremos para identificarlas.

---

[7] a) Q, c) $\neg P$, d) $P \rightarrow R$, e) $P \vee Q$, $Q \rightarrow P$ g) $P \wedge Q$, $P \rightarrow Q$, $Q \rightarrow P$… h) P, Q…
En los incisos b) y f) no puede hacerse ninguna implicación

Tabla 3. Implicaciones lógicas

1.	$P \Rightarrow (P \vee Q)$	adición (A)
2.	$(P \wedge Q) \Rightarrow P$	simplificación (S)
3.	$(P \rightarrow \text{Contradicción}) \Rightarrow \neg P$	absurdo
4.	$[P \wedge (P \rightarrow Q)] \Rightarrow Q$	modus ponens (MP)
5.	$[(P \rightarrow Q) \wedge \neg Q] \Rightarrow \neg P$	modus tollens (MT)
6.	$[(P \vee Q) \wedge \neg P] \Rightarrow Q$	silogismo disyuntivo (SD)
7.	$P \Rightarrow [Q \rightarrow (P \wedge Q)]$	
8.	$[(P \leftrightarrow Q) \wedge (Q \leftrightarrow R)] \Rightarrow (P \leftrightarrow R)$	transitividad de $\leftrightarrow$
9.	$[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \Rightarrow (P \rightarrow R)$	transitividad de $\rightarrow$ o silogismo hipotético (SH)
10a.	$(P \rightarrow Q) \Rightarrow [(P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)]$	
b.	$(P \rightarrow Q) \Rightarrow [(P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)]$	
c.	$(P \rightarrow Q) \Rightarrow [(Q \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)]$	

2.4.3 Métodos de Demostración

Continuaremos manejando las mismas ideas con las que trabajamos las implicaciones lógicas. Se dice que se tiene un argumento cuando a partir de una serie de suposiciones (proposiciones que se consideran verdaderas, nuestras hipótesis), se ofrece una conclusión. Cuando es posible seguir paso a paso el razonamiento hasta implicar lógicamente la conclusión, el argumento es válido y con este proceso se ha dado una demostración de él. Por el contrario si existe un ejemplo que muestra que siendo todas las hipótesis verdaderas, la conclusión es falsa, el argumento es no válido y el ejemplo que sirvió para mostrar esto, recibe el nombre de **contraejemplo**. En este caso se dice que se refuta el argumento.
Comencemos por evaluar algunos argumentos:

1) Si el abanico estaba funcionando entonces los ladrones estuvieron en la cocina y activaron el interruptor. Si nadie vio la luz encendida, entonces no activaron el interruptor. O nadie vio la luz encendida o quien la vio no quiso involucrarse. El abanico estaba funcionando. Por lo tanto, quien vio la luz encendida no quiso involucrarse.

Antes de evaluar el argumento es conveniente traducirlo al lenguaje de la lógica, asignaremos una variable a cada proposición simple
p: el abanico estaba funcionando
q: los ladrones estuvieron en la cocina
r: los ladrones activaron el interruptor
s: nadie vio la luz encendida
t: quien la vio no quiso involucrarse

Traduciremos ahora el argumento
$p \rightarrow q \wedge r$

$s \to \neg r$
$s \vee t$
p
por tanto t

Intentaremos primero probar que el argumento es válido tratando de implicar lógicamente la conclusión a partir de las hipótesis, como ya dijimos nuestro punto de partida será tomar a las hipótesis como verdaderas. En este proceso iremos implicando una proposición verdadera en cada nueva línea a partir de las anteriores, justificando a su derecha por qué es verdadera. Esta justificación se hace en forma abreviada anotando los números de las líneas a partir de las cuales se hizo la implicación y la regla de inferencia que la justifica.

1)	$p \to q \wedge r$	hipótesis (H)	
2)	$s \to \neg r$	H	
3)	$s \vee t$	H	
4)	p	H	
5)	$q \wedge r$	1), 4), MP	1) y 4) significa que $q \wedge r$ es verdadera porque $p \to q \wedge r$ y p lo son; MP significa que modus ponens es la regla de inferencia que permite afirmar que en una implicación verdadera el consecuente es verdadero cuando el antecedente lo es.
6)	r	5), S	
7)	$\neg s$	2), 6), MT	
8)	t	3), 7), SD	

Hemos demostrado que el argumento es válido, ya que se pudo implicar t de las hipótesis (premisas). Esto es, hemos probado la siguiente implicación lógica (o teorema)
$(p \to q \wedge r) \wedge (s \to \neg r) \wedge (s \vee t) \wedge p \Rightarrow t$

2) Antonio dice la verdad o Marta estaba en el parque con María. Si Marta estaba en el parque con María, entonces llegó tarde a la cita. Si Marta llegó tarde a la cita, entonces ella no vio al ladrón. Por tanto, si Antonio dice la verdad, entonces Marta no vio al ladrón.

Para traducirlo asignemos:
p: Antonio dice la verdad
q: Marta estaba en el parque con María
r: Marta llegó tarde a la cita
s: Marta vio al ladrón
el argumento queda:
$p \vee q$
$q \to r$
$r \to \neg s$
por tanto $p \to \neg s$

Intentemos demostrarlo

1) $p \vee q$ H
2) $q \to r$ H
3) $r \to \neg s$ H
4) $q \to \neg s$ 2), 3), SH

Al parecer no podemos implicar algo más, por lo que empezamos a dudar que el argumento sea válido; intentemos encontrar un contraejemplo que refute el argumento. Para encontrar el contraejemplo, necesitamos buscar una asignación de valores que haga que todas nuestras hipótesis sean verdaderas y la conclusión falsa. Necesitamos por tanto, que p sea verdadera y $\neg s$ falsa (s verdadera) para que $p \to \neg s$ pueda ser falsa; puesto que p es verdadera, ya se aseguró la veracidad de la primera hipótesis, para asegurar que la tercera hipótesis sea verdadera necesitamos que r sea falsa puesto que ya teníamos a s como verdadera. Por último, para que la segunda hipótesis sea verdadera se requiere que q también sea falsa. De lo anterior vemos que el argumento no es válido. Formalizando:

El argumento no es válido ya que para p: V, q: F, r: F, s: V se tiene que todas las hipótesis son verdaderas, sin embargo la conclusión es falsa.

Ejercicios 2.4.3:
En cada caso, identifica si el razonamiento es válido o no. Si es válido, demuestra su validez, si no, refútalo.

1) Si la acción es válida y Luis participó en ella, entonces Jorge tiene razón. O Jorge no tiene razón o Luis será responsabilizado. Luis no será responsabilizado. Por lo tanto la acción no es válida o Luis no participó en ella.

2) Mario será propuesto como director si y sólo si la mayoría asiste a la reunión. La mayoría asiste a la reunión. O Mario es propuesto como director o Alejandro no será elegido. Por tanto Alejandro será elegido.

3) Si Rosa fue al teatro, entonces Raúl no fue. Si Raúl no fue al teatro, entonces Javier tampoco fue. Si Javier tampoco fue al teatro, entonces la obra no vale la pena. La obra sí vale la pena o Adrián no la verá. Rosa fue al teatro. Por tanto, Adrián no verá la obra.

4) $t \to s$, $u \to w$ y $\neg(u \to s)$ Por tanto $w \wedge \neg t$

5) $d \to b$, $a \vee c \to d$ y $\neg b$ Por tanto $\neg a$

6) Si no se organiza el torneo, no iré de vacaciones. Si voy de vacaciones, conoceré personas interesantes. No conoceré personas interesantes. Por tanto no se organizó el torneo.

7) Si estudio para este examen, entonces no iré al cine. O visito a Ubaldo o voy al cine. Si visito a Ubaldo, entonces no estudiaré para este examen. Por tanto no estudiaré para este examen.

8) $p \rightarrow q \wedge r$, $q \vee s \rightarrow t$ y $p \vee s$ Por tanto t

9) Si los mapas son precisos y los interpreto correctamente, me encontraré a Luis. Si no interpreto los mapas correctamente llegaré tarde a la boda. Por tanto, si no encontré a Luis y no llegué tarde a la boda, los mapas son imprecisos.

La manera en la que hemos estado demostrando ha sido: partir de las premisas y llegar a la conclusión; ésta, que es la forma directa de hacerlo, no es la única. Por ejemplo, cuando se analizó el problema en el que había que determinar la cueva donde estaba la princesa, lo que hicimos fue suponer que estaba en la cueva A, pero esto nos llevó a una contradicción; por lo que no podía estar en la cueva A. De la misma manera analizamos para la cueva B y de nuevo caímos en una contradicción. Al suponer que estaba en la cueva A o en la cueva B, negamos que estaba en la cueva C. El hecho de llegar a una contradicción al negar que la princesa estaba en la cueva C, junto con la premisa de que tenía que estar en una de las cuevas, nos llevó a concluir que estaba en la cueva C.

Esta forma de probar algo, que utilizamos en el problema de la princesa sin darle un nombre, se conoce como **demostración por contradicción**. Formalizando: este método consiste en mostrar que el suponer que las premisas son verdaderas y la conclusión falsa (negar que la conclusión sea verdadera) lleva a una contradicción.

Por ejemplo, de los razonamientos anteriores, tratemos de probar que el 8 es válido

$p \rightarrow q \wedge r$, $q \vee s \rightarrow t$ y $p \vee s$ Por tanto t

1) $p \rightarrow q \wedge r$	H
2) $q \vee s \rightarrow t$	H
3) $p \vee s$	H
	por la forma de las premisas es difícil hacer una implicación a partir sólo de ellas, por lo que es conveniente en este caso intentar una demostración por contradicción. Agregaremos a las premisas la negación de la conclusión (NC).
4) $\neg t$	NC
5) $\neg(q \vee s)$	2,4, MT
6) $\neg q \wedge \neg s$	5, equivalencia lógica (EL) 8a.
7) $\neg s$	6, S
8) p	3, 7, SD
9) $q \wedge r$	1, 8, MP
10) q	9, S
11) $\neg q$	6, S
12) $q \wedge \neg q$	10, 11, C
Contradicción	

Hemos demostrado que el argumento es válido, porque el suponer que la conclusión es falsa cuando las premisas son verdaderas nos ha llevado a una contradicción.

En resumen, un argumento solamente puede ser: válido o no válido. De manera que al analizarlo, podemos comenzar por ver si existe una combinación de valores para las variables involucradas en el argumento que hagan que todas las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa; si logramos encontrar esta combinación de valores, el argumento no es válido. Si no logramos encontrar tal combinación de valores, intentaremos hacer una demostración, directa o por contradicción.

Consideremos el problema 9 de los ejercicios anteriores:
Si los mapas son precisos y los interpreto correctamente, me encontraré a Luis. Si no interpreto los mapas correctamente llegaré tarde a la boda. Por tanto, si no encontré a Luis y no llegué tarde a la boda los mapas son imprecisos.

Simbolicemos de la siguiente manera:
p: los mapas son precisos
q: interpreto los mapas correctamente
r: me encontraré a Luis
s: llegaré tarde a la boda
$p \wedge q \rightarrow r$
$\neg q \rightarrow s$
$\therefore \neg r \wedge \neg s \rightarrow \neg p$

Veamos si existe una asignación de valores para p, q, r y s que hagan verdaderas las dos hipótesis y falsa la conclusión. Para que la conclusión ($\neg r \wedge \neg s \rightarrow \neg p$) sea falsa necesitamos que la conjunción $\neg r \wedge \neg s$ sea verdadera y $\neg p$ falsa; de aquí, deben ser p: V, r:F y s:F. Con estos valores para que la primera hipótesis ($p \wedge q \rightarrow r$) sea verdadera necesitamos que q sea falsa, pero si q es falsa, la segunda hipótesis ($\neg q \rightarrow s$) no puede ser verdadera. Con este análisis nos damos cuenta que no existe tal combinación de valores. Demostremos entonces que el argumento es válido.

Como ya hemos dicho, el que un argumento sea válido significa que siempre que las hipótesis sean verdaderas, la conclusión es verdadera. Por esta razón siempre comenzamos una demostración suponiendo que las hipótesis son verdaderas. Si hacemos una demostración directa, haremos implicaciones lógicas a partir de las hipótesis hasta implicar la conclusión. Si decidimos hacer una demostración por contradicción, agregaremos a las premisas la negación de la conclusión y buscaremos implicar lógicamente una contradicción.

Para el argumento que acabamos de analizar, haremos una demostración por contradicción.
Demostración:

1)	$p \wedge q \rightarrow r$	H
2)	$\neg q \rightarrow s$	H
3)	$\neg(\neg r \wedge \neg s \rightarrow \neg p)$	NC
4)	$\neg[\neg(\neg r \wedge \neg s) \vee \neg p]$	3, EL 10a.
5)	$(\neg r \wedge \neg s) \wedge p$	4, EL 8a.
6)	$\neg r \wedge \neg s$	5, S
7)	p	5, S

8) $\neg r$ 6, S
9) $\neg s$ 6, S
10) q 2, 9, MT
11) $p \wedge q$ 7, 10, C
12) r 1, 11, MP
13) $\neg r \wedge r$ 8, 12, C
Contradicción

Como llegamos a una contradicción, al suponer que la conclusión era falsa siendo las hipótesis verdaderas, podemos concluir que en realidad la conclusión es verdadera siempre que las hipótesis lo sean. Con lo cual queda demostrado que el argumento es válido.
En este caso la contradicción implicada fue $\neg r \wedge r$ pero podría haber sido $(p \wedge q) \wedge \neg (p \wedge q)$, $q \wedge \neg q$ o cualquier otra proposición que siempre sea falsa.

Para finalizar con este tema, retomemos la afirmación hecha en la página 2, ejercicio 6.
Si $A B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$
Habíamos concluido que esta afirmación no es una proposición ya que no se especifica a cuál conjunto pertenecen A y B. Especifiquemos esto para convertirla en proposición y analicémosla como argumento.

a) Si $A, B \in \mathbb{R}$ y $A B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$
b) Si $A, B \in M_{2x2}$ y $A B = 0$, entonces $A = 0$ o $B = 0$

De nuestros conocimientos de matemáticas sabemos que el primer argumento es válido, de hecho es un teorema en esta disciplina y esto podría llevarnos a pensar que el segundo también es válido, sin embargo un análisis más cuidadoso nos muestra que no es así. Aprovechemos estos dos ejemplos para exhibir cómo hacer, en el contexto de las matemáticas, una demostración de un teorema y cómo refutar un argumento no válido.

Demostremos el argumento del inciso a)
1) $A, B \in \mathbb{R}$ H
2) $A B = 0$ H
3) $A = 0$ o $A \neq 0$ 1), propiedad de tricotomía ($A = 0$ o $A > 0$ o $A < 0$)
4) Si $A = 0$ ya terminamos
5) Si $A \neq 0$, existe $1/A \in \mathbb{R}$ tal que $(1/A) A = 1$ propiedad del inverso multiplicativo
6) $(1/A) (AB) = (1/A) (0)$ 2), multiplicar ambos lados de una igualdad por un mismo número real no altera la igualdad
7) $[(1/A) A] B = 0$ 6), propiedad asociativa, propiedad del número cero
8) $1 (B) = 0$ 7), propiedad del inverso multiplicativo
9) $B = 0$ 8), propiedad del neutro multiplicativo
10) $A = 0$ o $B = 0$ 4), 9)

Refutemos el argumento del inciso b)

Para $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$ y $B = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ se tiene que $A, B \in M_{2X2}$ y que $AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ esto es, las hipótesis son verdaderas, sin embargo la conclusión es falsa ya que $A \neq 0$ y $B \neq 0$ por lo que el argumento no es válido.

Cuando se ha demostrado $P \Rightarrow Q$, se tiene que siempre que P sea verdadera, Q lo será también, por eso se dice que P es una **condición suficiente** para que se dé Q. Por otro lado, si Q es falsa, P nunca será verdadera, por eso se dice que Q es una **condición necesaria** para que se dé P. (Q es necesaria, pero no suficiente para P, ya que Q puede ser verdadera y P ser falsa). Por ejemplo, un teorema de las matemáticas dice que "Si una función f es derivable en un intervalo I, entonces f es continua en I". Esto es, es suficiente que f sea derivable en I para que sea continua en ese intervalo. Por otro lado es necesario que f sea continua en I para ser derivable en el intervalo. De este análisis se tiene que el que una función f sea continua, no asegura que sea derivable, pero siendo derivable hay garantía de que es continua.

Si en otro caso puede probarse $P \Rightarrow Q$ y $Q \Rightarrow P$ se habrá probado $P \Leftrightarrow Q$ y se dirá que P es una **condición necesaria y suficiente** para Q, lo mismo se dirá de Q para P.

Tarea 2a

1) Durante el reinado de Arturo, estando Inglaterra bajo constante amenaza de invasión, llegaron espías a la tierra del monarca para recabar información secreta. Los espías siempre mentían, los caballeros siempre decían la verdad y todos los demás eran "gente normal" que a veces decían la verdad y a veces mentían. Merlín siempre estaba alerta para identificar a los espías. Se enfrenta a tres desconocidos, los llamaremos A, B y C, sabe que cada uno de los tres pertenece a un tipo diferente: uno es caballero, otro es espía y el otro es normal. Los personajes hacen las siguientes afirmaciones:
   A: C no es espía
   B: A no es caballero
   C: B es caballero
   ¿Cuál es la identidad de cada uno de los tres?

2) Las parejas formadas por uno de 4 caballeros (Bernardo, Edgardo, Eduardo o Ricardo) y una de 4 damas (Carina, Marina, Vanina o Yanina) llevan cinco años de noviazgo. Deduce quiénes forman cada pareja así como el día (15, 16, 17 o 18) y el mes (enero, febrero, marzo o abril) en que festeja cada par de tórtolos su aniversario asumiendo que las siguientes afirmaciones son verdaderas.

   1. Si un aniversario es el 15 de abril, Vanina no es novia de Edgardo.
   2. Si Vanina no es novia de Edgardo, Yanina festeja en abril.
   3. Si Yanina festeja en abril, Marina festeja un día 15.
   4. Si el festejo del 15 no es en abril, entonces Carina es novia de Eduardo.
   5. Si Carina es novia de Eduardo, Bernardo festeja un día 17.
   6. Si Bernardo festeja un día 17, Vanina festeja en enero.
   7. Si Vanina festeja en enero, Eduardo festeja en febrero.

8. Si Carina festeja en febrero, Vanina festeja un día 18.
9. Si un aniversario es el 18 de enero, Marina festeja en marzo.
10. Si Vanina no es novia de Edgardo, el festejo del 16 no es en febrero.

Novio	Novia	Día	Mes

3) En cada inciso, da la(s) combinación(es) de valores para que la proposición dada sea falsa
   a) $(\neg q \vee \neg s \rightarrow q) \vee [(\neg p \vee q) \vee (s \wedge p)]$
   b) $(r \rightarrow \neg p) \wedge [(r \wedge s) \vee t] \wedge (t \rightarrow q \vee u) \wedge (\neg q \wedge \neg u) \rightarrow p$
   c) $(p \rightarrow q) \vee (\neg q \vee s \rightarrow p \wedge r)$
   d) $(p \rightarrow q \vee r) \wedge (q \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow r \vee s)$

4) Escribe la proposición recíproca de:
   a) $a \wedge b \rightarrow c \vee d$
   b) $\neg s \vee r \rightarrow t \wedge s$
   c) $\neg(u \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg t \vee u$
   d) $\neg a \vee b \rightarrow \neg(a \wedge c)$

5) Escribe la contrapositiva de cada una de las proposiciones del problema 4.

6) Cambia las siguientes proposiciones por otras lógicamente equivalentes a ellas, usando la equivalencia indicada
   a) $\neg[(r \wedge s) \vee \neg t]$ 8a
   b) $a \rightarrow \neg c \wedge b$ 10a
   c) $(\neg s \wedge r) \vee (p \wedge q)$ 11a
   d) $(r \vee t) \wedge \neg s$ 8d

7) Escribe, para cada una de las proposiciones del problema 4, proposiciones lógicamente equivalentes que sólo tengan los términos de enlace $\neg$, $\vee$.

8) Determina, en cada caso, si el argumento es válido o no. Si es válido, demuestra su validez, si no refútalo.
   a) "Si Pedro es elegido ganador, entonces Juan está fuera de combate. Si Pedro es elegido ganador, entonces Miguel también está fuera de combate. Juan está fuera de combate y Miguel está fuera de combate. Por tanto, Pedro es elegido ganador"
   b) "Si el meteorológico predice clima seco, entonces iré de excursión o iré a nadar. Iré a nadar si y sólo si el meteorológico predice clima caluroso. Por lo tanto, si no voy de excursión, el meteorológico predijo clima húmedo o caluroso" (d, h, s, w)

9) Haz una demostración directa del siguiente argumento

Si $p \to q$, $\neg r \to s$ y $\neg q \vee \neg s$, entonces $p \to r$

10) Construye demostraciones por contradicción de los siguientes teoremas
   a) Si $p \to q$, $r \to p \wedge s$, $q \wedge s \to p \wedge t$ y $\neg t$, entonces $p \to \neg r$
   b) Si $p \to q \vee r$ y $q \to s$, entonces $p \to r \vee s$

11) Considera las siguientes hipótesis: "Si aprendo inglés o francés, entonces me desenvolveré bien en Canadá. Si aprendo alemán, entonces no me desenvolveré bien y mi viaje será un fracaso. No me desenvolveré bien en Canadá" ¿Cuál de las siguientes conclusiones debe seguir; es decir, puede inferirse de las hipótesis? Justifica tu respuesta.
   a) Aprenderé alemán
   b) Mi viaje será un fracaso
   c) No aprenderé francés
   d) Si mi viaje fue un fracaso, entonces aprendí alemán
   e) Si aprendo inglés, mi viaje no será un fracaso

12) ¿Puede concluirse de las siguientes premisas "El público terminó aplaudiendo al músico"? Justifica.
   "Si el músico es bueno, no cometerá errores y el público lo aplaudirá. El músico no comete errores. No hubo tiempo de que el músico terminara su ejecución y no lo aplaudieron, o, cometió errores. "

13) Di si la proposición dada es verdadera o falsa. Si es verdadera, da un breve, pero claro argumento de por qué lo es; si es falsa da un contraejemplo.
   "Si la disyunción entre dos proposiciones es verdadera, la conjunción de la negación de cada una de ellas también es verdadera".

2.5 Lógica de Predicados

Si te piden que calcules la suma de todos los enteros del 1 al 100 (1 + 2 + 3 + 4 + . . . + 97 + 98 + 99 + 100) ¿cómo lo harías?, Gauss[8] lo resolvió a los diez años de la siguiente manera:

se dio cuenta que sumando los números en parejas, tomando el primero y el último, el segundo y el penúltimo, …, es decir, 1 + 100, 2 + 99, 3 + 98, **...**, 50 + 51 la suma siempre era 101 y que se formaban un total de 50 parejas. De manera que la suma buscada era (101) (50) = 5050.

¿Podría este método usado por Gauss servirnos para sumar 1 + 2 + **...** + n donde n es cualquier entero positivo? Si crees que sí, ensaya para diferentes valores de n, propón una fórmula y justifica su validez

$$1 + 2 + \ldots + n = \underline{\hspace{6cm}}$$

[8] Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

En la fórmula que encontraste están implícitas una infinidad de proposiciones. Una para cada valor de n (número de términos), generalmente se acostumbra denotarlas p(1), p(2), p(3), …, p(n), …

En este ejemplo,
$$p(1):\ 1=\frac{1(1+1)}{2}$$
$$p(2):\ 1+2=\frac{2(2+1)}{2}$$
$$p(3):\ 1+2+3=\frac{3(3+1)}{2}$$
$$\vdots$$
$$p(n):\ 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$
$$\vdots$$

Por lo anterior, decir que la fórmula propuesta es válida, significa afirmar que cada una de las proposiciones con índices en $\mathbb{Z}^+$ (p(1), p(2), p(3), etc.) son verdaderas ¿Cómo podría escribirse, usando los símbolos de la lógica una proposición que involucre cada una de estas proposiciones p(n) y que sea verdadera sólo si p(n) lo es para cada n en $\mathbb{Z}^+$?

Con lo que sabemos hasta ahora podríamos hacerlo así:
p(1) $\wedge$ p(2) $\wedge$ p(3) $\wedge$ $\cdots$ $\wedge$ p(n) $\cdots$ es verdadera, pero
p(1) $\wedge$ p(2) $\wedge$ p(3) $\wedge$ $\cdots$ $\wedge$ p(n) $\cdots$ no es una proposición válida en la lógica proposicional por involucrar un número infinito de proposiciones.

Al trabajar, como en el caso comentado, con una sucesión infinita de proposiciones, se hace necesario usar nuevos símbolos y reglas que nos permitan evaluar expresiones como "p(x) es verdadera para toda x", "p(x) es verdadera para alguna x", "no existe x que haga verdadera a p(x)", "existe un único x que hace verdadera a p(x)" donde los valores que tomará x son los elementos de un conjunto que puede ser infinito. Los nuevos símbolos que se introducen para esto son $\forall$ y $\exists$, llamados cuantificadores. Al cuantificador $\forall$ se le conoce como cuantificador universal y se lee "para todo". Así, por ejemplo, para simbolizar la afirmación "p(x) es verdadera para toda x", escribiríamos $\forall x\ p(x)$, que también podría leerse "para cada x, p(x)", "para toda x, p(x)" o "para cualquier x, p(x)". El cuantificador existe $\exists$ es llamado cuantificador existencial y se lee "existe". De manera que la proposición compuesta $\exists x\ p(x)$, se leería "existe x tal que p(x)", "hay una x tal que p(x)" o "para alguna x, p(x)".

Al conjunto de valores de x sobre los cuales vamos a valorar si p(x) es verdadera o falsa lo llamaremos **Dominio del discurso** o **Universo del discurso** y lo denotaremos por U. Este sistema de símbolos formado por $\forall, \exists$ y los usados en la lógica proposicional, junto con las reglas que nos permiten saber cómo evaluar una proposición en la que estos símbolos se incluyan, se llama **lógica de predicados**. Este nombre es tomado del contexto del estudio de los lenguajes y obedece a la similitud con el papel que juega el predicado en una oración.

Para comenzar nuestro estudio de la lógica de predicados, partiremos de que todo lo que vimos en la lógica proposicional es válido en la lógica de predicados, ahora aprenderemos además la forma de evaluar proposiciones en las que aparezcan los símbolos agregados.

Analicemos el valor de verdad que tienen las proposiciones $\forall x\, \mathrm{p}(x)$ y $\exists x\, \mathrm{p}(x)$. Para hacerlo consideremos que p(x) constituye una familia de proposiciones con índices x en un conjunto U, es decir U es el universo del discurso.

1) $\forall x\, \mathrm{p}(x)$ es verdadera si p(x) es verdadera para cada x en U.

2) $\exists x\, \mathrm{p}(x)$ es verdadera si p(x) es verdadera por lo menos para una x en U y falsa si no hay un sólo valor de x en todo el universo de discurse que haga verdadera a p(x). De manera que en este caso, en cuanto se encuentra un valor de x que hace verdadera a p(x) puede afirmarse que la proposición es verdadera sin necesidad de continuar el análisis para otros valores de x.

3) La proposición "existe una única x tal que p(x)" se escribe $\exists! x\, \mathrm{p}(x)$. Esta proposición es verdadera cuando hay una y sólo una x que hace a p(x) verdadera y es falsa en cualquier otro caso.

Cuando una persona quiere afirmar que p(x) es verdadera para cada x escribe $\forall x\, \mathrm{p}(x)$, que su afirmación sea correcta o no, eso es otra cosa. Todo lo que se escribe se hace suponiendo que la afirmación es verdadera; el trabajo en lógica consiste en valorar si realmente lo es. Por otra parte, cuando se quiera decir que p(x) es falsa para toda x, deberá escribirse $\forall x \neg \mathrm{p}(x)$.

Veamos con algunos ejemplos cómo evaluar proposiciones en las que se involucran estos nuevos símbolos y reglas.

1) Retomemos nuestro ejemplo inicial, consideremos a $\mathbb{Z}^+$ como el universo del discurso y para cada n $\in \mathbb{Z}^+$, p(n) como la proposición $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

   Siguiendo a Gauss, veamos que p(n) es verdadera para cualquier n par.
   Al agrupar los números, para sumarlos en parejas (el primero con el último, el segundo con el penúltimo, el tercero con el antepenúltimo, …)

   $$1+2+3+\cdots+(n-2)+(n-1)+n$$

   obtenemos n/2 parejas, cada una de suma de n+1. Siendo el total buscado (n/2)(n+1) = $\frac{n(n+1)}{2}$. En el caso de n impar, también tendríamos que p(n) es verdadera pues podría servirnos la misma justificación si agregamos el cero como primer sumando ($0+1+2+3+\cdots+n$) para completa (n+1)/2 parejas de suma n.

Hemos justificado la veracidad de p(n), tanto para n par como para n impar, puesto que un número en $\mathbb{Z}^+$ sólo puede ser par o impar, queda probado que $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ p(n) es verdadera. Es claro que si la proposición p(n) es verdadera para toda n, lo será en particular para una, por lo que en este caso $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ p(n) es también verdadera. Esto nos lleva a una implicación lógica, escríbela simbólicamente sobre la línea[9]

____

2) La proposición $\exists x[x^2 + 1 = 0]$ es falsa tomando a $\mathbb{R}$ como dominio del discurso ya que no hay en los reales un número x que satisfaga la igualdad

3) Considerando $p(x): x^2 - 4 = 0$, la proposición $\exists! x p(x)$ es verdadera tomando a $\mathbb{Z}^+$ como el universo de discurso y falsa tomando a $\mathbb{Z}$. Justifica por qué[10]. En cambio la proposición $\exists x\, p(x)$ es verdadera tomando cualquiera de los dos dominios. ¿Por qué?[11]

2.6 Álgebra Declarativa en Lógica de Predicados

Como ya comentamos, cuando neguemos o enlacemos proposiciones en la lógica de predicados con los términos de enlace $\wedge$, $\vee$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ seguiremos las mismas reglas que analizamos en la lógica proposicional. Por ejemplo, tomando como universo del discurso a $\mathbb{R}$, la proposición $\exists x[x^2 + 1 = 0] \vee \exists! x[x^2 - 4 = 0]$ es falsa, ¿cambiaría el valor de verdad de esta proposición si tomamos a $\mathbb{R}^+$ como universo del discurso?[12]

Ejercicios 2.6a:

1) En cada inciso evalúa la proposición dada considerando U = {25, 342, 161, 214, 172, 217, 297} como el universo del discurso.
   a) $\exists x[\text{x es múltiplo de 7}]$
   b) $\exists! x[\text{x es múltiplo de 7}]$
   c) $\forall x[\text{x es múltiplo de 7}]$

2) En cada inciso evalúa la proposición dada considerando $\mathbb{R}$ como el universo del discurso.
   a) $\forall x[(x+3)^2 = x^2 + 9]$
   b) $\exists x[(x+3)^2 = x^2 + 9]$
   c) $\exists! x[(x+3)^2 = x^2 + 9]$
   d) $\forall x[-x \text{ es negativo}]$
   e) $\forall x[x^2 > 0] \wedge \exists x[\frac{1}{x} \notin \mathbb{R}]$

---

[9] $\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ p(n)} \Rightarrow \exists n \in \mathbb{Z}^+ \text{ p(n)}$

[10] Porque tomando U = $\mathbb{Z}^+$ sólo 2 satisface la igualdad, mientras que tomando U = $\mathbb{Z}$ tanto 2 como -2 la satisfacen.

[11] Porque esta proposición es verdadera con que haya un valor que haga verdadera p(x), el que haya más valores no la convierte en falsa.

[12] Sí cambiaría porque ahora en nuestro universo del discurso sólo estaría 2, ya no -2.

3) Da un universo del discurso que haga que la proposición del inciso d) cambie su valor de verdad.

4) ¿Existe un universo del discurso que haga que la proposición del inciso e) del problema 2 cambie su valor de verdad? Justifica.

5) Enlaza las dos proposiciones de la conjunción dada en el inciso e) del problema 2) con $\rightarrow$, de manera que obtengas una condicional verdadera.

En una oración, el predicado es lo que se dice del sujeto; de igual forma, p(x) es lo que se dice de x, por esta razón se llama predicado a p(x); en este contexto, x está haciendo las veces de sujeto.

En un predicado, cada vez que damos un valor a x, tomado del universo del discurso, obtenemos una oración declarativa que puede ser falsa o verdadera, es decir, para cada valor de x, obtenemos un valor para p(x). De manera que dar un predicado es establecer una función con un dominio U que tomará el valor falso o verdadero. Por ejemplo, si consideramos el predicado p(x): "$-$x es negativo" con $\mathbb{R}$ como universo del discurso; p(-5) quedaría "$-(-5)$ es negativo", por lo que p(-5) es falsa, es decir p(x) toma el valor falso cuando x es -5, mientras que p(3) es verdadera.

Una manera de formar una proposición a partir de un predicado p(x), es como ya se dijo en el párrafo anterior, dándole un valor a x, las proposiciones así formadas son del tipo de las que se vieron en lógica proposicional. En cambio en la lógica de predicados, las proposiciones se forman acompañando a p(x) de un cuantificador y especificando el universo del discurso, en la práctica se acostumbra especificar este universo en la misma proposición, así en lugar de escribir "$\exists x$ p(x) con universo del discurso U", se escribe "$\exists x \in$ U p(x)". U restringe los valores que puede tomar x y el cuantificador, la forma en que se va a determinar el valor de la proposición. De esta manera, la proposición tiene un significado fijo y un valor que no varía con x. Por esta razón, cuando se establece una proposición usando cuantificadores, se dice que la x queda acotada y se le da el nombre de **variable acotada**. Por ejemplo, en las proposiciones $\forall x \in \mathbb{R}$ p(x) (para todo número real x, p(x)), $\exists! x \in \mathbb{Z}^+$ p(x) (existe un único entero positivo tal que p(x)), $\exists x \in \mathbb{Z}^+$ p(x) (existe un entero positivo tal que p(x)), la x está acotada. En contraparte, la variable x, en la expresión p(x) se llama **variable libre** del predicado.

Consideremos la proposición $\forall x \in \mathbb{R}\, \exists y \in \mathbb{R}\ [x + y = 0]$ que se lee "para cada número real *x* existe un número real *y* tal que $x + y = 0$". Esta proposición se evalúa tomando en cuenta ambos cuantificadores a la vez, considerándolos de izquierda a derecha. La proposición es verdadera puesto que cada número real *x* tiene un inverso aditivo $y = -x$.
Sin embargo, si escribiéramos los cuantificadores al revés $\exists y \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R}\ [x + y = 0]$ la proposición resultante sería falsa porque no hay un número real que sea inverso aditivo de todos los reales. En este caso tenemos una proposición en la que el predicado es una función de dos variables: *x* y *y* por lo que, para formar una proposición a partir de este

predicado, fue necesario el uso de dos cuantificadores y la selección de dos universos del discurso (uno para cada variable). En este caso ambas variables, x y y, son variables acotadas. Si hubiéramos escrito $\exists y \in \mathbb{R}\ [xy = 1]$, la única acotada sería y, la x sería una variable libre, por lo que esta expresión no sería una proposición. Tendríamos una proposición cada vez que le diéramos un valor a x, o bien acotando a x con un cuantificador como se analizó al inicio.

Ejercicios 2.6b:

1) En cada inciso evalúa la proposición dada.
   a) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ [xy = 0]$
   b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R}\ [xy = 0]$

2) Determina un universo del discurso que al ser especificado en el espacio en blanco haga la proposición i) verdadera ii) falsa.
   a) $\exists y \in \mathbb{R}\ \forall x \in$_____ $[xy = 0]$
   b) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in$_____ $[xy = 0]$

3) Escribe sobre la línea el símbolo $\Rightarrow$, o $\rightarrow$ según sea la proposición una tautología o no lo sea.
   a) $\forall x\ p(x)$ ______ $\exists x\ p(x)$
   b) $\exists x\ p(x)$ ______ $\forall x\ p(x)$
   c) $\exists! x\ p(x)$ ______ $\exists x\ p(x)$
   d) $\forall y \exists x\ p(x, y)$ ______ $\exists x \forall y\ p(x, y)$
   e) $\exists x \forall y\ p(x, y)$ ______ $\forall y \exists x\ p(x, y)$

4) Escribe sobre la línea el símbolo $\Leftrightarrow$, o $\leftrightarrow$ según sea la proposición una tautología o no lo sea.
   a) $\forall x\ \neg p(x)$ ______ $\neg\exists x\ p(x)$
   b) $\exists x\ p(x)$ ______ $\neg\forall x\ \neg p(x)$
   c) $\exists x \exists y\ p(x, y)$ ______ $\exists y \exists x\ p(x, y)$
   d) $\exists x \forall y\ p(x, y)$ ______ $\forall y \exists x\ p(x, y)$

Las equivalencias lógicas:

$\forall x\ \neg p(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\ p(x)$ y

$\exists x\ p(x) \Leftrightarrow \neg\forall x\ \neg p(x)$

analizadas en el problema anterior, junto con

$\neg\forall x\ p(x) \Leftrightarrow \exists x\ \neg p(x)$ y

$\neg\exists x\ p(x) \Leftrightarrow \forall x\ \neg p(x)$

Conforman un conjunto de equivalencias conocido como leyes de DeMorgan en la lógica de predicados. Para hacer referencia a ellas, las etiquetaremos de la siguiente manera:

$\forall x\ p(x) \Leftrightarrow \neg\exists x\ \neg p(x)$ DM1

$\exists x \ p(x) \Leftrightarrow \neg\forall x \ \neg p(x)$ DM2
$\neg\forall x \ p(x) \Leftrightarrow \exists x \ \neg p(x)$ DM3
$\neg\exists x \ p(x) \Leftrightarrow \forall x \ \neg p(x)$ DM4

La primera parte de la ley DM4 nos dice que no existe x alguna que haga verdadero el predicado p(x), lo cual es equivalente a decir que para todas las x, el predicado no se cumple, que es lo que se dice en la segunda parte de esta ley. Reflexiona y escribe tú qué nos dice cada una de las otras leyes.[13]

Utilizando estas leyes repetidamente puede expresarse en forma equivalente la negación de una proposición sin usar explícitamente el símbolo $\neg$.

Por ejemplo, $\neg\exists z\forall x\forall y[zx = zy]$ se escribe como $\forall z\exists x\exists y[zx \neq zy]$ después de transitar por una sucesión de equivalencias lógicas. Mostraremos la sucesión de pasos para este ejemplo indicando en cada caso cuál de las leyes de DeMorgan ha sido aplicada y resaltando con paréntesis la parte de la proposición que está afectada por la negación
$\neg(\exists z\forall x\forall y[zx = zy])$
$\forall z\neg(\forall x\forall y[zx = zy])$ DM4
$\forall z\exists x\neg(\forall y[zx = zy])$ DM3
$\forall z\exists x\exists y\neg[zx = zy]$ DM3
$\forall z\exists x\exists y[zx \neq zy]$

Ejercicios 2.6c:
1) En cada inciso cambia la proposición por otra equivalente en la que ya no aparezca el símbolo $\neg$
   a) $\neg\exists y\forall x[x < y]$
   b) $\neg\forall x\exists y\exists w[xw <= y]$
   c) $\neg\forall x\exists y\neg\forall w[xy <= w]$

2) En cada inciso escribe la negación de la proposición dada, sin que en dicha negación aparezca el símbolo $\neg$
   a) $\forall x\forall y[xy = 0 \rightarrow y = 0]$
   b) $\forall x\exists y[xy = 1 \vee x = 0]$

2.7 Inducción Matemática

El método de inducción matemática sirve para probar que un predicado es válido para cualquier entero positivo n; esto es, probar la veracidad de una infinidad de proposiciones, una para cada entero positivo. Proposiciones como las que se generan en los siguientes contextos

[13] La equivalencia $\forall x \ p(x) \Leftrightarrow \neg\exists x \ \neg p(x)$ afirma que decir "p(x) es verdadera para todo valor de x" es lo mismo que decir "no existe valor de x que haga falsa a p(x)".

Para un conjunto A con n elementos
p(n): “El número de subconjuntos de A, es 2^n”

Para un polígono P de n lados
p(n): “La suma de los ángulos internos de P es $180(n-2)$”

Para un algoritmo dado, podría usarse también la inducción para demostrar que el algoritmo produce la salida esperada, se da un ejemplo sencillo al final de esta sección.

Comenzaremos el estudio de la inducción matemática analizando la siguiente proposición

p(n): $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$ para todo entero positivo n

que puede escribirse abreviadamente como $\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2 \ \forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

así por ejemplo, p(5) será igual a $\sum_{i=1}^{5}(2i-1) = 5^2$ donde cada sumando se consigue sustituyendo el valor de i en la expresión $2i - 1$, esto es,

primer sumando $2(1) - 1 = 1$
segundo sumando $2(2) - 1 = 3$
… quinto sumando $2(5) - 1 = 9$ por lo que p(5) = $\sum_{i=1}^{5}(2i-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + 9$

Verifiquemos que la fórmula es válida para un solo sumando (n = 1)
p(1): $1 = 1^2$ sí es válida

ahora para dos sumandos (n = 2)
p(2): $1 + 3 = 2^2$ sí es válida

ahora para seis sumandos (n = 6)
p(6): $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 36$

Si quisiéramos saber si la fórmula es válida para cualquier número de sumandos n, necesitaríamos verificar para cada uno de los enteros positivos; hacerlo de la manera anterior no es posible porque nunca acabaríamos, hay una infinidad de estos números. Es para este tipo de demostraciones que la inducción matemática es indispensable. Probando el resultado anterior, exhibiremos este método de demostración.

Se desea probar que la suma de los n primeros números impares es igual a n^2
Ya probamos, que la fórmula es válida para n = 1 (la primera proposición, p(1), es verdadera) ya que $1 = 1^2$.

Supongamos ahora que $\exists\, k \in \mathbb{Z}^+$ p(k) es verdadera.
Esto es:
$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$

sumando a ambos lados de la igualdad $2(k + 1) - 1$ (que es el siguiente sumando), obtenemos

$$\begin{aligned} 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + 2(k + 1) - 1 &= k^2 + 2(k + 1) - 1 \\ &= k^2 + 2k + 2 - 1 \\ &= k^2 + 2k + 1 \\ &= (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Hemos probado que si $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2$ es verdadera, entonces $1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + 2(k + 1) - 1 = (k + 1)^2$ también lo es.

y con esto hemos terminado nuestra demostración, ¿por qué?
Porque como primero probamos que era válida para n = 1 y después logramos ver también que siendo válida para un entero positivo, era válida para el siguiente, tenemos la certeza de que es válida para n = 2 y, si es válida para n = 2, será también válida para n = 3, así mismo, si es válida para n = 3, lo será para n = 4 y así sucesivamente.

Recapitulemos mostrando la esencia del método; como vimos, consta de dos partes
1ª Probar que la primera proposición es válida
2ª Probar que si es válida para un valor, es válida para el siguiente

A la primera parte se le llama paso básico y a la segunda, paso inductivo. Usando la notación vista antes, esta 2ª parte puede escribirse así

$$p(k) \Rightarrow p(k + 1)$$

Ejemplo:
Demostrar que $n^2 > n + 1 \;\; \forall\, n \in \mathbb{Z}^+, n \geq 2$

Tenemos que empezar por probar la validez de la primera proposición
Paso básico:

$$\begin{aligned} &2^2 = 4 \\ &2 + 1 = 3 \\ &4 > 3 \end{aligned}$$

por lo que p(2) es verdadera

Ahora debemos probar que $p(k) \Rightarrow p(k + 1)$
Supondremos que $n^2 > n + 1$ es válido para algún entero positivo n = k, es decir, $k^2 > k + 1$;

partiendo de esto y usando <u>sólo reglas válidas</u> deberemos llegar a que $(k + 1)^2 > (k + 1) + 1$

Paso inductivo:

1) $k^2 > k + 1$	se considera válida para algún entero positivo k
2) $k^2 + 2k + 1 > k + 1 + 2k + 1$	sumando a ambos miembros $2k + 1$
3) $(k + 1)^2 > k + 1 + 1 + 2k$	factorizando el primer miembro y reacomodando el 2º
4) $k + 1 + 1 + 2k > k + 1 + 1$	por ser 2k mayor que cero

5) $(k+1)^2 > (k+1)+1+2k > (k+1)+1$ de la 3) y la 4)

6) $(k+1)^2 > (k+1)+1$ por transitividad

por lo que p (k) $\Rightarrow$ p (k + 1). Con estos dos pasos hemos probado que la proposición p(n) es verdadera para todos los enteros positivos $n \geq 2$.

Consideremos ahora la proposición p(n): $n^2 + 5n + 1$ es par. Comencemos por probar el paso inductivo.
Supongamos que $\exists\, k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$ tal que p(k) es verdadera, esto es, supongamos que $k^2 + 5k + 1$ es par para algún entero mayor o igual que 2, entonces

$k^2 + 5k + 1 = 2m$ para algún entero m
$k^2 + 5k + 1 + 2k + 1 + 5 = 2m + 2k + 1 + 5$
$(k^2 + 2k + 1) + (5k + 5) + 1 = 2m + 2k + 6$
$(k+1)^2 + 5(k+1) + 1 = 2(m + k + 3)$
$(k+1)^2 + 5(k+1) + 1$ es par

Hemos probado p (k) $\Rightarrow$ p (k + 1), o sea que, si existe un entero positivo k para el que $k^2 + 5k + 1$ es par, entonces para el siguiente entero (k+1), tendremos también que $(k+1)^2 + 5(k+1) + 1$ es par. Falta ahora encontrar ese entero.

Probemos n =1
$1^2 + 5(1) + 1 = 7$ el entero que buscamos no es 1
Probemos n =2
$2^2 + 5(2) + 1 = 15$ tampoco es 2

Después de hacer varias pruebas más podríamos empezar a dudar que exista un entero positivo que cumpla la proposición. Mientras no podamos encontrar ese entero la proposición no ha quedado demostrada. Ya que en el paso inductivo sólo se consigue afirmar que, el que la proposición sea verdadera para algún entero está condicionado a que haya sido verdadera para el anterior. En este caso no hemos podido encontrar ese entero, de hecho, podemos probar que no existe.

Veamos: ese entero que estamos buscando sólo puede ser par (2m) o impar (2m – 1), donde m = 1, 2, 3, ...
Si n = 2m
$$\begin{aligned} n^2 + 5n + 1 &= (2m)^2 + 5(2m) + 1 \\ &= 4m^2 + 10m + 1 \\ &= 2(2m^2 + 5m) + 1 \quad \text{éste es un número impar} \end{aligned}$$
Si n = 2m – 1
$$\begin{aligned} n^2 + 5n + 1 &= (2m-1)^2 + 5(2m-1) + 1 \\ &= 4m^2 - 4m + 1 + 10m - 5 + 1 \\ &= 2(2m^2 + 3m - 2) + 1 \quad \text{que también es un número impar} \end{aligned}$$

Podríamos entonces proponer p(n): $n^2 + 5n + 1$ es impar para todo entero positivo n. Para esta proposición sí podría hacerse una demostración por inducción. Hazla.

Además de lo que hemos visto, una aplicación importante del método de inducción matemática es la de demostrar que en un programa de computación una estructura cíclica funcionan como se espera.
Por ejemplo, demostremos por inducción que el siguiente algoritmo escrito en pseudocódigo imprime los cubos de los enteros positivos en orden creciente.

```
I ← 1
S ← 0
Inicio del ciclo
        S ← S + 3I(I –1) + 1
        Imprimir S
        I ← I + 1
Fin del ciclo
```

Demostración por inducción:
Paso básico: la primera vez que se imprime a S (primera ejecución del ciclo) ésta tiene el valor 1 ya que $S \leftarrow 0 + 3(1)(1-1) + 1$.

Paso inductivo: Supongamos que la k-ésima vez que se imprime a S (en la k-ésima ejecución del ciclo) ésta tiene el valor k^3; en este momento $I = k$ y al finalizar el ciclo, $I = k + 1$. Entonces la $(k + 1)$-ésima vez que se imprima a S ésta tendrá el valor $S \leftarrow k^3 + 3(k + 1)(k+1-1)+1$, es decir $S \leftarrow (k + 1)^3$ ya que

$$\begin{aligned} k^3 + 3(k + 1)(k+1-1)+1 &= k^3 + 3(k+1)k + 1 \\ &= k^3 + 3k^2 + 3k + 1 \\ &= (k+1)^3 \end{aligned}$$

Hemos probado que el algoritmo imprime los cubos de los enteros positivos en orden creciente. Al dar al ciclo un criterio para detenerse se tendrá un algoritmo que imprima los cubos de los n primeros enteros positivos.

Explica por qué la demostración que acabamos de hacer equivale a demostrar la validez de la fórmula[14] $\sum_{I=1}^{n}\left[3I(I-1)+1\right] = n^3$

Tarea 2b

1) Expresa en pseudocódigo un algoritmo que imprima los cuadrados de los enteros positivos en orden creciente y demuestra su efectividad. Sugerencia: toma como referencia una de las fórmulas demostradas en los ejemplos.

2) Demuestra $4 + 10 + 16 + \ldots + (6n - 2) = n(3n + 1) \;\; \forall \; n \in \mathbb{Z}^+$

[14] Porque en $S \leftarrow S + 3I(I-1) + 1$ cada valor generado por $3I(I-1) + 1$ se suma al anterior, entonces si $I = n$ $S = \sum_{I=1}^{n}\left[3I(I-1)+1\right] = n^3$

3) Demuestra $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a^i = \frac{a^{n+1}-1}{a-1}$ $\forall\, a \in \mathbb{R},\ a \neq 0, a \neq 1$ y $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

4) Demuestra que $n^3 - 4n + 6$ es divisible por 3 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

5) Demuestra que $5^n - 4n - 1$ es divisible por 16 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

6) Demuestra $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2$, es decir $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

7) Demuestra que $7^n - 2^n$ es divisible por 5 $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

8) Demuestra que $a^n - b^n$ es divisible por $(a - b)$ $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

9) Demuestra que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(ai+b) = \frac{an(n+1)+2bn}{2}$ $\forall\, a,b \in \mathbb{R}$ y $\forall\, n \in \mathbb{Z}^+$

Solución de ejercicios
Lógica

Ejercicio de Introducción
Juan mató a Felipe
Justificación
Supongamos que Pedro mató a Felipe, entonces su declaración "yo no lo maté" es falsa y como una y sólo una declaración de cada uno es falsa, las otras 2 declaraciones de Pedro son verdaderas. Lo anterior implica que las declaraciones "Pedro y Daniel son mis amigos" y "Pedro jamás ha matado a alguien" hechas por Juan, sean falsas. Pero esto contradice la hipótesis de que una y sólo una declaración de cada uno es falsa, por lo tanto Pedro no puede ser el asesino.
Supongamos ahora que el asesino es Daniel, entonces sus declaraciones "yo no lo maté" y "yo no sé quién lo mató" son falsas, lo cual contradice la hipótesis mencionada, por lo tanto Daniel tampoco es el asesino.
Como según otra hipótesis, uno de los tres es el culpable, concluimos que Juan es el que mató a Felipe y la veracidad o falsedad de las declaraciones queda como sigue:

Pedro	"Yo no lo maté"	Verdadera
	"Yo nunca había visto a Juan antes"	Falsa
	"Es cierto, yo conocía a Felipe"	Verdadera
Juan	"Yo no lo maté"	Falsa
	"Pedro y Daniel son mis amigos"	Verdadera
	"Pedro jamás ha matado a alguien"	Verdadera
Daniel	"Yo no lo maté"	Verdadera
	"Pedro miente cuando dice que no había visto a Juan antes"	Verdadera
	"Yo no sé quién lo mató"	Falsa

Ejercicios 2.1
1)

vecino	reparó	olvidó	en
Ubaldo	armario	Pinza	cocina
Venancio	puerta	Lima	baño
Tancredo	ventana	martillo	jardín

2) La princesa está en la cueva C
Justificación
Supongamos que la princesa está en la cueva A. Como el letrero donde está la princesa es verdadero, entonces la cueva C está vacía. Ahora, como el dragón debe estar en una de las tres cuevas y la princesa está en la A y la C está vacía, entonces el dragón está en la cueva B; pero esto nos lleva a que el letrero donde está el dragón también es verdadero, lo cual contradice la hipótesis de que sólo el de la princesa es verdadero. Por lo tanto la princesa no puede estar en la cueva A.
Supongamos ahora que la princesa está en la cueva B, entonces el letrero de esta cueva "el dragón está en esta cueva" es falso, pero esto contradice la hipótesis de que el letrero donde está la princesa es verdadero, entonces la princesa tampoco está en la cueva B.
Por lo tanto la princesa está en la cueva C, la B está vacía y el dragón está en la A.

3) Luis González o Luis Morales

4) Llueve y es martes. La siguiente tabla resume la información, un análisis de la tabla lleva a la conclusión.

	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Lluvioso	A	B,C	A	B,C	A	B,C	
Despejado	B,C	A	B,C	A	B,C	A	

Ejercicios 2.3a

1)

a) No es proposición (oración imperativa)
b) Proposición compuesta, disyunción verdadera
c) Proposición simple, verdadera
d) Proposición simple, su valor de verdad depende de quién hizo la afirmación y en qué momento la hizo.
e) Proposición compuesta, implicación verdadera
f) Proposición compuesta, conjunción falsa
g) No es proposición (oración interrogativa)
h) No es proposición (oración ambigua ya que no se especifica a cual conjunto pertenecen *x* y *y*)
i) Proposición compuesta, bicondicional verdadera

2)

a) "$x^2 = y^2$ implica $x = y$ para todo x, y en $\mathbb{R}^+$"
b) "$x^2 = y^2$ implica $x = y$ para todo x, y en $\mathbb{R}$"

3)

a) Falsa
b) Verdadera
c) Falsa
d) Verdadera

4)

Niño	Edad	Instrumento	Idioma
León	5	oboe	sueco
Igor	8	tuba	chino
Jonás	7	violín	ruso
Simón	6	fagot	griego

Ejercicios 2.3b

1)

p q r	$(p \rightarrow q) \rightarrow \neg q \vee (\neg s \wedge p)$
F F F	V **V** V V V F F
F F V	V **V** V V F F F
F V F	V **F** F F V F F
F V V	V **F** F F F F F
V F F	F **V** V V V V V
V F V	F **V** V V F F V

V V F	V	**V**	F	V	V	V V
V V V	V	**F**	F	F	F	F V

2)

p q r	p ∧ q ∨ r ↔ p ∧ ¬ q			
F F F	F	F	**V**	F
F F V	F	V	**F**	F
F V F	F	F	**V**	F
F V V	F	V	**F**	F
V F F	F	F	**F**	V
V F V	F	V	**V**	V
V V F	V	V	**F**	F
V V V	V	V	**F**	F

Ejercicios 2.3c:

a)

i) 1) V
2) disyunción
3) p:F, q:F, s:V, r:V

ii) 1) ↔
2) bicondicional
3) ninguna, la proposición es una tautología

iii) 1) →
2) condicional
3) p:F, q:V, r:F
p:F, q:F, r:V
p:F, q:F, r:F

b)

i) 1) ¬
2) negación
3) p:F, q:V, r:F

ii) 1) ↔
2) bicondicional
3) p:F, q:F, r:V, s:V
p:V, q:F, r:V, s:F
p:V, q:V, r:V, s:F

Ejercicios 2.4.1a

1)

de la proposición	recíproca	contrapositiva
A	d	b
B	c	a
C	b	d
D	a	c

2) La condicional es lógicamente equivalente a su contrapositiva.

3) $\neg p \lor q$

4)

a) Porque mientras la conjunción es verdadera para sólo una combinación de valores; la disyunción lo es para tres.

b) $\neg(\neg p \lor \neg q)$ Es una negación.

Ejercicios 2.4.1b

1) Se requiere elaborar tablas como la siguiente y verificar que los valores de las proposiciones son los mismos en cada una de las combinaciones de valores de las variables lógicas.

PQ	$P\land Q$	$\neg(\neg P \lor \neg Q)$

Las respuestas para las equivalencias 6a a 6d se dan en el texto como pies de página.

2) $\Leftrightarrow$ representa una $\leftrightarrow$ que siempre es verdadera.

3)

a) $\neg p \lor q$

b) $\neg(\neg p \lor \neg q)$

c) $\neg[\neg(\neg p \lor q) \lor \neg(\neg q \lor p)]$

d) $(\neg p \lor \neg q) \lor \neg(q \lor \neg r)$

e) $\neg[\neg(\neg p \lor q) \lor \neg(q \lor r)$

f) $\neg a \lor \neg[\neg(b \lor c) \lor \neg(d \lor s)]$

Ejercicios 2.4.3:

1) El argumento es válido

Demostración

1)	$p \land q \to r$	H
2)	$\neg r \lor s$	H
3)	$\neg s$	H
4)	$\neg r$	2), 3) SD
5)	$\neg(p \land q)$	1), 4) MT
6)	$\neg p \lor \neg q$	5) E L 8b

2) El argumento no es válido ya que para p:V, q:V y r:F las hipótesis ($p \leftrightarrow q$, q, $p \lor \neg r$) son verdaderas y la conclusión (r) es falsa.

3) El argumento es válido

Demostración

1)	$p \to \neg q$	H
2)	$\neg q \to \neg r$	H
3)	$\neg r \to \neg s$	H
4)	$s \lor \neg t$	H
5)	p	H
6)	$\neg q$	1), 5) MP

7) $\neg r$ 2), 6) MP
8) $\neg s$ 3), 7) MP
9) $\neg t$ 4), 8) SD

4) El argumento es válido
Demostración

1)	$t \rightarrow s$	H
2)	$u \rightarrow w$	H
3)	$\neg(u \rightarrow s)$	H
4)	$u \wedge \neg s$	3), EL 11b
5)	u	4) S
6)	w	2), 5) MP
7)	$\neg s$	4) S
8)	$\neg t$	1), 7) MT
9)	$w \wedge \neg t$	6), 8) Conjunción

5) El argumento es válido
Demostración

1)	$d \rightarrow b$	H
2)	$a \vee c \rightarrow d$	H
3)	$\neg b$	H
4)	$\neg d$	1), 3) MT
5)	$\neg(a \vee c)$	2), 4) MT
6)	$\neg a \wedge \neg c$	5) EL 8a
7)	$\neg a$	6) S

6) El argumento no es válido ya que para p:V, q:F y r:F las hipótesis ($\neg p \rightarrow \neg q$, $q \rightarrow r$, $\neg r$) son verdaderas y la conclusión ($\neg p$) es falsa.

7) El argumento es válido
Demostración

1)	$p \rightarrow \neg q$	H
2)	$r \vee q$	H
3)	$r \rightarrow \neg p$	H
4)	$q \vee r$	2) EL 2a
5)	$\neg q \rightarrow r$	4) EL 11a
6)	$p \rightarrow r$	1), 5) SD
7)	$p \rightarrow \neg p$	3), 6) SD
8)	$\neg p \vee \neg p$	7) EL 10a
9)	$\neg p$	8) EL 5a

8) El argumento es válido
Demostración (por contradicción)

1)	$p \rightarrow q \wedge r$	H
2)	$q \vee s \rightarrow t$	H
3)	$p \vee s$	H
4)	$\neg t$	NC
5)	$\neg(q \vee s)$	2), 4) MT

6) $\neg q \wedge \neg s$ — 5) EL 8a
7) $\neg q$ — 6) S
8) $\neg s$ — 6) S
9) p — 3), 8) SD
10) $q \wedge r$ — 1), 9) MP
11) q — 10) S
12) $\neg q \wedge q$ — 7), 11) C
13) contradicción — 12) EL 7b

Demostración (directa)

1) $p \rightarrow q \wedge r$ — H
2) $q \vee s \rightarrow t$ — H
3) $p \vee s$ — H
4) $q \rightarrow t$ — 2) EL 12a
5) $s \rightarrow t$ — 2) EL 12a
6) $p \rightarrow q$ — 1) EL 12b
7) $p \rightarrow r$ — 1) EL 12b
8) $p \rightarrow t$ — 6), 4) SH
9) $p \vee s \rightarrow t$ — 8), 5) EL 12a
10) t — 9), 3) MP

9) El argumento es válido

Demostración por contradicción

1) $p \wedge q \rightarrow r$ — H
2) $\neg q \rightarrow s$ — H
3) $\neg(\neg r \wedge \neg s \rightarrow \neg p)$ — NC
4) $\neg(\neg(\neg r \wedge \neg s) \vee \neg p)$ — 3) EL 10a
5) $(\neg r \wedge \neg s) \wedge p$ — 4) EL 8b
6) $\neg r \wedge \neg s$ — 5) S
7) p — 5) S
8) $\neg r$ — 6) S
9) $\neg s$ — 6) S
10) q — 2), 9) MT
11) $p \wedge q$ — 7), 10) C
12) r — 1), 11) MP
13) $r \wedge \neg r$ — 8), 12) C
14) contradicción — 13) EL7b

Tarea 2a

1) A es caballero, B es espía y C es normal.

2)

Novio	Novia	Día	Mes
Eduardo	Carina	16	febrero
Bernardo	Yanina	17	abril
Edgardo	Vanina	18	enero
Ricardo	Marina	15	marzo

3)

a) Sólo hay una combinación p:V, q:F, s:F
b) Sólo hay una combinación p:F, q:F, r:V, s:V, t:V, u:F
c) Hay dos combinaciones p:V, q:F, r:F, s:F
   p:V, q:F, r:F, s:V
d) No existe combinación de valores que haga falsa la proposición

4)

a) $c \vee d \rightarrow a \wedge b$
b) $t \wedge s \rightarrow \neg s \vee r$
c) $\neg t \vee u \rightarrow \neg(u \rightarrow \neg r)$
d) $\neg(a \wedge c) \rightarrow \neg a \vee b$

5)

a) $\neg(c \vee d) \rightarrow \neg(a \wedge b)$
b) $\neg(t \wedge s) \rightarrow \neg(\neg s \vee r)$
c) $\neg(\neg t \vee u) \rightarrow (u \rightarrow \neg r)$
d) $a \wedge c \rightarrow \neg(\neg a \vee b)$

6)

a) $\neg(r \wedge s) \wedge t$
b) $\neg a \vee (\neg c \wedge b)$
c) $\neg(\neg s \wedge r) \rightarrow (p \wedge q)$
d) $\neg[\neg(r \vee t) \vee s]$

7)

a) $(\neg a \vee \neg b) \vee (c \vee d)$
b) $\neg(\neg s \vee r) \vee \neg(\neg t \vee \neg s)$
c) $(\neg u \vee \neg r) \vee (\neg t \vee u)$
d) $\neg(\neg a \vee b) \vee (\neg a \vee \neg c)$

8)

a) El argumento no es válido ya que para p:F, q:V y r:V se tiene que las hipótesis son verdaderas y la conclusión es falsa.
b) El argumento es válido
   Demostración por contradicción

1)	$d \rightarrow h \vee s$	H
2)	$s \leftrightarrow w$	H
3)	$\neg(\neg h \rightarrow \neg d \vee w)$	NC
4)	$\neg[h \vee (\neg d \vee w)]$	3) EL 10a
5)	$\neg h \wedge \neg(\neg d \vee w)$	4) EL 8a
6)	$\neg h$	5) S
7)	$\neg(\neg d \vee w)$	5) S
8)	$d \wedge \neg w$	7) EL 8a
9)	d	8) S
10)	$\neg w$	8) S
11)	$(s \rightarrow w) \wedge (w \rightarrow s)$	2) EL 13
12)	$s \rightarrow w$	11) S

13) $w \to s$	11) S
14) $\neg s$	10), 12) MT
15) $h \vee s$	1), 9) MP
16) h	14), 15) SD
17) $h \wedge \neg h$	16), 6), C
18) contradicción	17) EL7b

9) Demostración directa

1) $p \to q$	H
2) $\neg r \to s$	H
3) $\neg q \vee \neg s$	H
4) $q \to \neg s$	3) EL 11a
5) $p \to \neg s$	1), 4) SH
6) $\neg s \to r$	2) EL 9
7) $p \to r$	5), 6) SH

10)

a) Demostración por contradicción

1) $p \to q$	H
2) $r \to p \wedge s$	H
3) $q \wedge s \to p \wedge t$	H
4) $\neg t$	H
5) $\neg(p \to \neg r)$	NC
6) $\neg(\neg p \vee \neg r)$	5) EL 10a
7) $p \wedge r$	6) EL 8a
8) p	7) S
9) r	7) S
10) q	1), 8) MP
11) $p \wedge s$	1), 9) MP
12) s	11) S
13) $q \wedge s$	10), 12) C
14) $p \wedge t$	3), 13) MP
15) t	14) S
16) $t \wedge \neg t$	4), 15) C
17) contradicción	16) EL 7b

b) Demostración por contradicción

1) $p \to q \vee r$	H
2) $q \to s$	H
3) $\neg(p \to r \vee s)$	NC
4) $\neg[\neg p \vee (r \vee s)]$	3) EL 10a
5) $p \wedge \neg(r \vee s)$	4) EL 8a
6) p	5) S
7) $\neg(r \vee s)$	5) S
8) $\neg r \wedge \neg s$	7) EL 8a
9) $\neg r$	8) S
10) $\neg s$	8)S
11) $q \vee r$	1), 6) MP

12) q   9), 11) SD
13) s   2), 12) MP
14) $s \wedge \neg s$ 10), 13) C
15) contradicción   14) EL 7b

11) Considerando la siguiente simbolización
p: aprendo inglés
q: aprendo francés
r: me desenvolveré bien en Canadá
s: aprendo alemán
t: mi viaje será un fracaso
Las hipótesis quedan:
$p \vee q \rightarrow r$
$s \rightarrow \neg r \wedge t$
$\neg r$

a) s: aprenderé alemán
s no puede inferirse de las hipótesis ya que para p:F, q:F, r:F, t:V y s:F las hipótesis son verdaderas y la conclusión (s), es falsa.

b) t: mi viaje será un fracaso
t no puede implicarse de las hipótesis ya que para p:F, q:F, r:F, s:F y t:F las hipótesis son verdaderas y la conclusión (t), es falsa.

c) $\neg q$: no aprenderé francés. $\neg q$ sí puede implicarse de las hipótesis.
Demostración

1)	$p \vee q \rightarrow r$	H
2)	$s \rightarrow \neg r \wedge t$	H
3)	$\neg r$	H
4)	$\neg(p \vee q)$	1), 3) MT
5)	$\neg p \wedge \neg q$	4) EL 8a
6)	$\neg q$	5)S

d) $t \rightarrow s$: si mi viaje fue un fracaso, entonces aprendí alemán.
$t \rightarrow s$ no puede inferirse de las hipótesis ya que para p:F, q:F, r:F, s:F y t:V las hipótesis son verdaderas y la conclusión ($t \rightarrow s$), es falsa.

e) $p \rightarrow \neg t$: si aprendo inglés, mi viaje no será un fracaso.
$p \rightarrow \neg t$ si puede implicarse de las hipótesis.
Demostración

1)	$p \vee q \rightarrow r$	H
2)	$s \rightarrow \neg r \wedge t$	H
3)	$\neg r$	H
4)	$\neg(p \vee q)$	1), 3) MT
5)	$\neg p \wedge \neg q$	4) EL 8a
6)	$\neg p$	5)S
7)	$\neg q$	5)S
8)	$\neg p \vee \neg t$	6)A

9) $p \rightarrow \neg t$ 8) EL 11a

12) Considerando la siguiente simbolización
p: el músico es bueno
q: el músico cometerá errores
r: el público lo aplaudirá
s: hubo tiempo de que el músico terminara su ejecución
No se puede implicar r(el público terminó aplaudiendo al músico) de las hipótesis, ya que para p:F, q:F, r:F, s:V las hipótesis son verdaderas y r, falsa.

13) La proposición es falsa. Lo siguiente es un contraejemplo. Considerando p:2=4 y q:12 es múltiplo de 3, se tiene que $p \vee q$ es verdadera; sin embargo $\neg p \wedge \neg q$, es falsa.

Ejercicios 2.6a:
1)
a) V
b) F
c) F

2)
a) F
b) V
c) V
d) F
e) F

3) $\mathbb{R}^+$

4) No, ya que 0 es el único valor para el que $\forall x[x^2 > 0]$ es falsa y 0 es también el único valor para el que $\exists x[\frac{1}{x} \notin \mathbb{R}]$ es verdadera, entonces si quitáramos a 0 del universo del discurso $\forall x[x^2 > 0]$ sería verdadera, mientras que $\exists x[\frac{1}{x} \notin \mathbb{R}]$ sería falsa y $\forall x[x^2 > 0] \wedge \exists x[\frac{1}{x} \notin \mathbb{R}]$ seguiría siendo falsa

5) $\forall x[x^2 > 0] \rightarrow \exists x[\frac{1}{x} \notin \mathbb{R}]$ (considerando que $\mathbb{R}$ es el universo del discurso)

Ejercicios 2.6b:
1)
a) V
b) V

2)
a)
i) $\mathbb{R}$
ii) No existe subconjunto de $\mathbb{R}$ que haga falsa la proposición
b)
i) $\mathbb{R}$
ii) $\mathbb{R}^+$

3)

a) $\Rightarrow$
b) $\rightarrow$
c) $\Rightarrow$
d) $\rightarrow$
e) $\Rightarrow$

4)

a) $\Leftrightarrow$
b) $\leftrightarrow$
c) $\Leftrightarrow$
d) $\leftrightarrow$

Ejercicios 2.6c:

1) En cada inciso cambia la proposición por otra equivalente en la que ya no aparezca el símbolo $\neg$
   a) $\forall y \exists x [x \geq y]$
   b) $\exists x \forall y \forall w [xw > y]$
   c) $\exists x \forall y \forall w [xy \leq w]$

2) En cada inciso escribe la negación de la proposición dada, sin que en ella aparezca el símbolo $\neg$
   a) $\exists x \exists y [xy = 0 \wedge y \neq 0]$
   b) $\exists x \forall y [xy \neq 1 \wedge x \neq 0]$

Tarea 2b

1) I ← 1
   S ← 0
   Inicio del ciclo
   S ← S + (2I–1)
   Imprimir S
   I ← I+1
   Fin de ciclo

   Demostración
   Paso básico
   Al inicio se asigna a I el valor 1y a S el valor de cero. La primera vez que se ejecutael ciclo S, actualiza su valor a:
   S ← 0 + 2(I–1) – 1
   S ← 1 siendo 1 (cuadrado del primer entero positivo), el primer valor que se imprime

   Paso inductivo
   Supongamos que en la k-ésima iteración se imprimió k^2, de manera que S = k^2 e I recibe ahora el valor de k + 1, ahora S se actualizará a:
   S ← $k^2 + 2(k + 1) - 1$
   $k^2 + 2k + 2 - 1$
   $k^2 + 2k + 1$
   $(k + 1)^2$ esto demuestra que en la siguiente iteración se imprimirá $(k + 1)^2$

2) $P(n): 4 + 10 + 16 + \cdots + (6n - 2) = n(3n + 1) \quad \forall n \in \mathbb{Z}^+$

Demostración

Paso básico

Si $n = 1$, $\quad n(3n + 1) = 4$

$\therefore$ $P(1): 4 = 1[3(1) + 1]$ es verdadera 1

Paso inductivo

Supongamos que P(n) es verdadera para n = k

$4 + 10 + 16 + \cdots + (6k - 2) = k(3k + 1)$

$$
\begin{aligned}
4 + 10 + 16 + \cdots + (6k - 2) + [6(k+1) - 2)] &= k(3k + 1) + [6(k+1) - 2)] \\
&= 3k^2 + k + 6k + 6 - 2 \\
&= 3k^2 + 7k + 4 \\
&= 3k^2 + 4k + 3k + 4 \\
&= 3k\,(k+1) + 4(k+1) \\
&= (k+1)(3k+4) \\
&= (k+1)(3k + 3 + 1)
\end{aligned}
$$

$4 + 10 + 16 + \cdots + (6k - 2) + [6(k+1) - 2)] = (k+1)[3(k+1) + 1)$

$\therefore P(k) \Rightarrow P(k+1)$ 2

De 1 y 2 se tiene que P(n) es verdadera para n = 1, 2, 3, …

3) P(n): para $a \in \mathbb{R}$,

Demostración

Paso básico

Si n = 1,

$\therefore$ P(1): es verdadera 1

Paso inductivo

Supongamos que P(n) es verdadera para n = k

∴ P(k) ⇒ P(k+1) 2

De 1 y 2 se tiene que P(n) es verdadera para n = 1, 2, 3, …

4) P(n): es divisible por 3 para toda
Demostración
Paso básico
Si n = 1, divisible por 3

∴ P(1): es verdadera 1

Paso inductivo
Supongamos que P(n) es verdadera para n = k
es divisible por 3
para algún entero m

donde
es divisible por 3

∴ P(k) ⇒ P(k+1) 2

De 1 y 2 se tiene que P(n) es verdadera para n = 1, 2, 3, …

5) P(n): es divisible por 16 para
Demostración
Paso básico
Si n = 1, divisible por 16

∴ P(1): es verdadera 1

Paso inductivo
Supongamos que P(n) es verdadera para n = k
es divisible por 16
para algún entero m

con

es divisible por 16

∴ p(k) ⇒ P(k+1) 2

De 1 y 2 se tiene que P(n) es verdadera para

6) P(n): $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n\ )$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

P(n): $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 =$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

P(n): $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 =$ $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

Demostración

Paso básico

Si n = 1, = = = 1

y $1^3 = 1$

∴ P(1): $1^3 =$ es verdadera 1

Paso inductivo

Supongamos que P(n) es verdadera para n = k

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 =$

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 = \quad + (k+1)^3$

=

=

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + k^3 + (k+1)^3 =$

∴ P(k) ⇒ P(k+1) 2

De 1 y 2 se tiene que P(n) es verdadera para n = 1, 2, 3, …

7) P(n): es divisible por 5 para

Demostración

Si n = 1, divisible por 5

∴ P(1): es verdadera 1

Supongamos que P(n) es verdadera para n = k, es decir

es divisible por 5

para algún entero m

es divisible por 5

∴ P(k) ⇒ P(k+1) 2

De 1 y 2 se tiene que es divisible por 5 para cualquier entero positivo n

8) P(n): es divisible por para
Demostración
Si n = 1, divisible por

por lo tanto P(1): es verdadera 1

Supongamos que P(n) es verdadera para n = k, es decir
es divisible por
para algún entero m

es divisible por

por lo tanto P(k) ⇒ P(k+1) 2

De 1 y 2 tenemos que es divisible por para cualquier entero positivo n

9) Demostración
Si n=1

$$\sum_{i=1}^{n}(ai+b)=a+b$$

$$\frac{an(n+1)+2bn}{2}=\frac{a(1)(2)+2b(1)}{2}=\frac{2(a+b)}{2}=a+b$$

∴ P(1) es verdadera 1

Supongamos que P(n) es verdadera para n = k

$$(a+b)+(2a+b)+(3a+b)+\cdots+(\mathrm{ka}+\mathrm{b})=\frac{\mathrm{ak(k+1)+2bk}}{2}$$

$$(a+b)+(2a+b)+(3a+b)+\cdots+(\mathrm{ka}+\mathrm{b})+\left[(\mathrm{k}+1)a+b\right]=\frac{\mathrm{ak(k+1)+2bk}}{2}+\left[(k+1)a+b\right]$$

$$=\frac{\mathrm{ak(k+1)+2bk}}{2}+\frac{2\left[(\mathrm{k}+1)a+b\right]}{2}$$

$$=\frac{\mathrm{ak(k+1)+2bk+2(k+1)a+2b}}{2}$$

$$= \frac{a(k+1)(k+2)+2b(k+1)}{2}$$

$\therefore$ P(k) $\Rightarrow$ P(k+1) ②

De ① y ② se tiene que P(n) es verdadera para n = 1, 2, 3, …